h-laplaciens sur objets singuliers

Claire David

Comment définir la différentiation et l'intégration sur des objets topologiques quelconques ? La solution a été donnée par Kolmogorov lui-même [1] :

"Il s'agit de construire un calcul différentiel très spécifique, conduisant, d'une part, à des opérateurs différentiels qui, lorsque l'on passe à la limite, s'appliquent à des tenseurs antisymmétriques, tout en étant en lien avec les principes de topologie combinatoire.

En particulier, il est donc possible de définir **de nouveaux complexes**, et les invariants associés."

On imagine sans peine les perspectives sous-jacentes, particulièrement, **définir une différentielle sur des objets non réguliers**, à l'aide de simplexes et de la cohomologie en regard.

Ce n'est que la première étape. **Que se passe-t-il lorsque les objets sont très petits**, soit parce que leur mesure tend vers zéro, ou lorsqu'ils appartiennent à un objet singulier, de type fractal ?

La généralisation de la notion algébrique de **chaîne** à des **fermions**, permet de définir le concept de h-différentiation, où h est un paramètre réel très petit. La h-cohomologie en regard est directement reliée à celle de De Rham. Un tel concept, naturellement en lien avec la notion de **frontière**, conduit **à un opérateur local équivalent au laplacien riemannien**, mais **opérant sur des objets singuliers**. Lorsque le paramètre h tend vers zéro, on retrouve le laplacien usuel. **Jusqu'à présent, le lien n'avait pas été établi**.

Mais **ce laplacien est-il aussi celui de l'analyse sur les fractales** [2,3] ? Cette problématique est d'autant plus intéressante que ce dernier est **défini par l'intermédiaire de différences** - le point de départ étant des laplaciens sur des graphes préfractaux, convergeant vers le domaine considéré.

Sous le prisme de la **h-cohomologie**, le lien est évident : modulo une constante multiplicative, c'est le même laplacien que celui sur les fractales.

1. A. N. Kolmogorov. "Skew-symmetric forms and topological invariants (Russian)". In : *Proc. Seminar on Vector and Tensor Analysis and Applications in Geometry, Mechanics and Physics, Moscow, Leningrad : GONTI* 1 (1937), p. 345–347.
2. J. Kigami. *Analysis on Fractals.* Cambridge University Press, 2001.
3. R. S. Strichartz. *Differential Equations on Fractals, A tutorial.* Princeton University Press, 2006.