Chapitre 5 : Résolution numérique des équations différentielles ordinaires d'ordre 1

I. Introduction

Soient

I. Introduction

Soient

- I un intervalle de $\mathbb{R}$,

I. Introduction

Soient

- I un intervalle de $\mathbb{R}$,
- $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue,

I. Introduction

Soient

- I un intervalle de $\mathbb{R}$,
- $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue,
- $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.

I. Introduction

Soient

- I un intervalle de $\mathbb{R}$,
- $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue,
- $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \begin{cases} \forall t \in I,\ y'(t) = f\big(t, y(t)\big) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad , \ y : I \to \mathbb{R} \text{ dérivable.}$$

I. Introduction

Soient

- I un intervalle de $\mathbb{R}$,
- $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue,
- $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \begin{cases} \forall t \in I, \ y'(t) = f\big(t, y(t)\big) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad , \ y : I \to \mathbb{R} \text{ dérivable.}$$

But :

I. Introduction

Soient

- I un intervalle de $\mathbb{R}$,
- $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue,
- $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \ \begin{cases} \forall t \in I, \ y'(t) = f\big(t, y(t)\big) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad , \ y : I \to \mathbb{R} \text{ dérivable.}$$

<u>But :</u> approcher numériquement une/la solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E).

I. Introduction

Une condition suffisante d'existence et d'unicité d'une solution pour (E) est donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz :

I. Introduction

Une condition suffisante d'existence et d'unicité d'une solution pour (E) est donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)

I. Introduction

Une condition suffisante d'existence et d'unicité d'une solution pour (E) est donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)

On suppose que f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable i.e.

I. Introduction

Une condition suffisante d'existence et d'unicité d'une solution pour (E) est donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)

On suppose que f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable i.e. $\exists C > 0, \forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$.
Alors (E) possède une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$,

I. Introduction

Une condition suffisante d'existence et d'unicité d'une solution pour (E) est donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)

On suppose que f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable i.e. $\exists C > 0, \forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$.
Alors (E) possède une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$, qui est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

I. Introduction

Une condition suffisante d'existence et d'unicité d'une solution pour (E) est donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)

On suppose que f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable i.e. $\exists C > 0, \forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$.
Alors (E) possède une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$, qui est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

On a aussi :

Une condition <u>suffisante</u> d'existence et d'unicité d'une solution pour (E) est donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)

On suppose que f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable i.e. $\exists C > 0, \forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$.
Alors (E) possède une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$, qui est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

On a aussi :

Théorème 2

Si f ne dépend pas de la deuxième variable,

I. Introduction

Une condition suffisante d'existence et d'unicité d'une solution pour (E) est donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)

On suppose que f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable i.e. $\exists C > 0, \forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$.
Alors (E) possède une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$, qui est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

On a aussi :

Théorème 2

Si f ne dépend pas de la deuxième variable, alors (E) possède une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$,

I. Introduction

Une condition suffisante d'existence et d'unicité d'une solution pour (E) est donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)

On suppose que f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable i.e. $\exists C > 0, \forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$.
Alors (E) possède une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$, qui est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

On a aussi :

Théorème 2

Si f ne dépend pas de la deuxième variable, alors (E) possède une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$, qui est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

I. Introduction

Une condition suffisante d'existence et d'unicité d'une solution pour (E) est donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)

On suppose que f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable i.e. $\exists C > 0, \forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$.
Alors (E) possède une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$, qui est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

On a aussi :

Théorème 2

Si f ne dépend pas de la deuxième variable, alors (E) possède une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$, qui est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Mais : il n'y a en général pas d'expression explicite pour y !

On suppose que

I. Introduction

On suppose que

- $I = [t_0, t_0 + T]$ avec $T > 0$,

On suppose que

- $I = [t_0, t_0 + T]$ avec $T > 0$,
- (E) possède une unique solution $y : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}$,

I. Introduction

On suppose que

- $I = [t_0, t_0 + T]$ avec $T > 0$,
- (E) possède une unique solution $y : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}$,
- $(t_0, \ldots, t_N)$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, est une subdivision de $[t_0, t_0 + T]$.

I. Introduction

On suppose que

- $I = [t_0, t_0 + T]$ avec $T > 0$,
- (E) possède une unique solution $y : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}$,
- $(t_0, \ldots, t_N)$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, est une subdivision de $[t_0, t_0 + T]$.

<u>But :</u> Approcher $y(t_1), \ldots, y(t_N)$ par des réels $y_1, \ldots, y_N$,

I. Introduction

On suppose que

- $I = [t_0, t_0 + T]$ avec $T > 0$,
- (E) possède une unique solution $y : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}$,
- $(t_0, \ldots, t_N)$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, est une subdivision de $[t_0, t_0 + T]$.

<u>But :</u> Approcher $y(t_1), \ldots, y(t_N)$ par des réels $y_1, \ldots, y_N$, calculés à l'aide d'une *méthode à un pas*.

II. Méthode de résolution numérique à un pas

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Pour $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, on note $h_n := t_{n+1} - t_n$.

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$, on note $h_n := t_{n+1} - t_n$.

Définition 3

Une méthode de résolution numérique de (E) à un pas consiste à

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Pour $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, on note $h_n := t_{n+1} - t_n$.

Définition 3

Une méthode de résolution numérique de (E) à un pas consiste à

- considérer une fonction continue $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Pour $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, on note $h_n := t_{n+1} - t_n$.

Définition 3

Une méthode de résolution numérique de (E) à un pas consiste à

- considérer une fonction continue $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- calculer les réels $y_1, \ldots, y_N$ donnés par la relation de récurrence

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Pour $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, on note $h_n := t_{n+1} - t_n$.

Définition 3

Une méthode de résolution numérique de (E) à un pas consiste à

- considérer une fonction continue $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- calculer les réels $y_1, \ldots, y_N$ donnés par la relation de récurrence

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n), \;\; n \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Pour $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, on note $h_n := t_{n+1} - t_n$.

Définition 3

Une méthode de résolution numérique de (E) à un pas consiste à

- considérer une fonction continue $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- calculer les réels $y_1, \ldots, y_N$ donnés par la relation de récurrence

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n), \;\; n \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Exemple :

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$, on note $h_n := t_{n+1} - t_n$.

Définition 3

Une méthode de résolution numérique de (E) à un pas consiste à

- considérer une fonction continue $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- calculer les réels $y_1, \dots, y_N$ donnés par la relation de récurrence

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n), \ \ n \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Exemple : La méthode d'Euler donnée par la relation

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$, on note $h_n := t_{n+1} - t_n$.

Définition 3

Une méthode de résolution numérique de (E) à un pas consiste à

- considérer une fonction continue $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- calculer les réels $y_1, \dots, y_N$ donnés par la relation de récurrence

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n), \;\; n \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Exemple : La méthode d'Euler donnée par la relation

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n), \;\; n \in \{0, \dots, N-1\}.$$

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Soit $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Soit $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit une première notion d'erreur de la méthode à un pas associée :

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Soit $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit une première notion d'erreur de la méthode à un pas associée :

Définition 4

Soit $n \in \{0, \ldots, N-1\}$.

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Soit $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit une première notion d'erreur de la méthode à un pas associée :

Définition 4

Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$. La quantité

$$e_n := y(t_{n+1}) - \big(y(t_n) + h_n \phi(t_n, y(t_n), h_n)\big)$$

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Soit $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit une première notion d'erreur de la méthode à un pas associée :

Définition 4

Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$. La quantité

$$e_n := y(t_{n+1}) - \big(y(t_n) + h_n \phi(t_n, y(t_n), h_n)\big)$$

est appelée <u>erreur de consistance locale</u> sur $[t_n, t_{n+1}]$.

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Soit $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit une première notion d'erreur de la méthode à un pas associée :

Définition 4

Soit $n \in \{0, \ldots, N-1\}$. La quantité

$$e_n := y(t_{n+1}) - \big(y(t_n) + h_n \phi(t_n, y(t_n), h_n)\big)$$

est appelée <u>erreur de consistance locale</u> sur $[t_n, t_{n+1}]$.

<u>Exemple :</u> Pour la méthode d'Euler,

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Soit $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit une première notion d'erreur de la méthode à un pas associée :

Définition 4

Soit $n \in \{0, \ldots, N-1\}$. La quantité

$$e_n := y(t_{n+1}) - \big(y(t_n) + h_n \phi(t_n, y(t_n), h_n)\big)$$

est appelée erreur de consistance locale sur $[t_n, t_{n+1}]$.

Exemple : Pour la méthode d'Euler, si la subdivision $(t_0, \ldots, t_N)$ est régulière

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Soit $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit une première notion d'erreur de la méthode à un pas associée :

Définition 4

Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$. La quantité

$$e_n := y(t_{n+1}) - \big(y(t_n) + h_n \phi(t_n, y(t_n), h_n)\big)$$

est appelée <u>erreur de consistance locale</u> sur $[t_n, t_{n+1}]$.

<u>Exemple :</u> Pour la méthode d'Euler, si la subdivision $(t_0, \dots, t_N)$ est régulière et $h := \frac{T}{N}$,

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Soit $\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit une première notion d'erreur de la méthode à un pas associée :

Définition 4

Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$. La quantité

$$e_n := y(t_{n+1}) - \big(y(t_n) + h_n \phi(t_n, y(t_n), h_n)\big)$$

est appelée <u>erreur de consistance locale</u> sur $[t_n, t_{n+1}]$.

<u>Exemple :</u> Pour la méthode d'Euler, si la subdivision $(t_0, \dots, t_N)$ est régulière et $h := \frac{T}{N}$, pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$e_n = \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(\xi_n, y(\xi_n)) + f(\xi_n, y(\xi_n)) \frac{\partial f}{\partial \gamma}(\xi_n, y(\xi_n)) \right) =: \frac{h^2}{2} f^{[1]}(\xi_n, y(\xi_n))$$

avec $\xi_n \in]t_n, t_{n+1}[$.

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Si $f \in \mathcal{C}^n(I \times \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$,

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Si $f \in \mathcal{C}^n(I \times \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, on définit par récurrence

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Si $f \in \mathcal{C}^n(I \times \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, on définit par récurrence

$$f^{[n]}(t,\gamma) = \frac{\partial f^{[n-1]}}{\partial t}(t,\gamma) + f(t,\gamma)\frac{\partial f^{[n-1]}}{\partial \gamma}(t,y)$$

si $(t,\gamma) \in I \times \mathbb{R}$

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Si $f \in \mathcal{C}^n(I \times \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, on définit par récurrence

$$f^{[n]}(t, \gamma) = \frac{\partial f^{[n-1]}}{\partial t}(t, \gamma) + f(t, \gamma)\frac{\partial f^{[n-1]}}{\partial \gamma}(t, y)$$

si $(t, \gamma) \in I \times \mathbb{R}$ et on a $y^{(n+1)}(t) = f^{[n]}(t, y(t))$ si $t \in I$.

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Si $f \in \mathcal{C}^n(I \times \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, on définit par récurrence

$$f^{[n]}(t,\gamma) = \frac{\partial f^{[n-1]}}{\partial t}(t,\gamma) + f(t,\gamma)\frac{\partial f^{[n-1]}}{\partial \gamma}(t,y)$$

si $(t,\gamma) \in I \times \mathbb{R}$ et on a $y^{(n+1)}(t) = f^{[n]}(t, y(t))$ si $t \in I$.

Définition et Proposition 5

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Si $f \in \mathcal{C}^n(I \times \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, on définit par récurrence

$$f^{[n]}(t, \gamma) = \frac{\partial f^{[n-1]}}{\partial t}(t, \gamma) + f(t, \gamma)\frac{\partial f^{[n-1]}}{\partial \gamma}(t, y)$$

si $(t, \gamma) \in I \times \mathbb{R}$ et on a $y^{(n+1)}(t) = f^{[n]}(t, y(t))$ si $t \in I$.

Définition et Proposition 5

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et que la subdivision $(t_0, \ldots, t_N)$ est régulière.

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Si $f \in \mathcal{C}^n(I \times \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, on définit par récurrence

$$f^{[n]}(t,\gamma) = \frac{\partial f^{[n-1]}}{\partial t}(t,\gamma) + f(t,\gamma)\frac{\partial f^{[n-1]}}{\partial \gamma}(t,y)$$

si $(t,\gamma) \in I \times \mathbb{R}$ et on a $y^{(n+1)}(t) = f^{[n]}(t, y(t))$ si $t \in I$.

Définition et Proposition 5

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et que la subdivision $(t_0, \ldots, t_N)$ est régulière. La méthode à un pas donnée par la relation

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{k=1}^{p} \frac{h^k}{k!} f^{[k-1]}(t_n, y_n), \; n \in \{0, \ldots, N-1\}$$

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Si $f \in \mathcal{C}^n(I \times \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, on définit par récurrence

$$f^{[n]}(t, \gamma) = \frac{\partial f^{[n-1]}}{\partial t}(t, \gamma) + f(t, \gamma)\frac{\partial f^{[n-1]}}{\partial \gamma}(t, y)$$

si $(t, \gamma) \in I \times \mathbb{R}$ et on a $y^{(n+1)}(t) = f^{[n]}(t, y(t))$ si $t \in I$.

Définition et Proposition 5

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et que la subdivision $(t_0, \ldots, t_N)$ est régulière. La méthode à un pas donnée par la relation

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{k=1}^{p} \frac{h^k}{k!} f^{[k-1]}(t_n, y_n), \; n \in \{0, \ldots, N-1\}$$

est appelée méthode de Taylor d'ordre p.

II. Méthode de résolution numérique à un pas

Si $f \in \mathcal{C}^n(I \times \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, on définit par récurrence

$$f^{[n]}(t,\gamma) = \frac{\partial f^{[n-1]}}{\partial t}(t,\gamma) + f(t,\gamma)\frac{\partial f^{[n-1]}}{\partial \gamma}(t,y)$$

si $(t,\gamma) \in I \times \mathbb{R}$ et on a $y^{(n+1)}(t) = f^{[n]}(t, y(t))$ si $t \in I$.

Définition et Proposition 5

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et que la subdivision $(t_0, \ldots, t_N)$ est régulière. La méthode à un pas donnée par la relation

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{k=1}^{p} \frac{h^k}{k!} f^{[k-1]}(t_n, y_n),\ \ n \in \{0, \ldots, N-1\}$$

est appelée méthode de Taylor d'ordre p. Si $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, on a

$$e_n = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{[p]}(\xi_n, y(\xi_n))$$

avec $\xi_n \in]t_n, t_{n+1}[$.

III. Consistance, stabilité et convergence

On se pose la question de la *convergence* de la méthode considérée vers la solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E)

On se pose la question de la *convergence* de la méthode considérée vers la solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E) quand le pas

$$h := \max_{i\in\{0,\dots,n-1\}} h_i = \max_{i\in\{0,\dots,n-1\}} (t_{i+1} - t_i)$$

tend vers 0.

On se pose la question de la *convergence* de la méthode considérée vers la solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E) quand le pas

$$h := \max_{i\in\{0,\dots,n-1\}} h_i = \max_{i\in\{0,\dots,n-1\}} (t_{i+1} - t_i)$$

tend vers 0. Tout d'abord :

On se pose la question de la *convergence* de la méthode considérée vers la solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E) quand le pas

$$h := \max_{i \in \{0,\ldots,n-1\}} h_i = \max_{i \in \{0,\ldots,n-1\}} (t_{i+1} - t_i)$$

tend vers 0. Tout d'abord :

Définition 6

On dit que la méthode est consistante

III. Consistance, stabilité et convergence

On se pose la question de la *convergence* de la méthode considérée vers la solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E) quand le pas

$$h := \max_{i\in\{0,\dots,n-1\}} h_i = \max_{i\in\{0,\dots,n-1\}} (t_{i+1} - t_i)$$

tend vers 0. Tout d'abord :

Définition 6

On dit que la méthode est consistante si l'erreur de consistance

$$e(t_0, \dots, t_N) := \sum_{n=0}^{N-1} |e_n|$$

On se pose la question de la *convergence* de la méthode considérée vers la solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E) quand le pas

$$h := \max_{i\in\{0,\dots,n-1\}} h_i = \max_{i\in\{0,\dots,n-1\}} (t_{i+1} - t_i)$$

tend vers 0. Tout d'abord :

Définition 6

On dit que la méthode est consistante si l'erreur de consistance

$$e(t_0, \dots, t_N) := \sum_{n=0}^{N-1} |e_n|$$

tend vers 0 quand h tend vers 0.

Définition 7

On dit que la méthode est <u>stable</u>

Définition 7

On dit que la méthode est stable s'il existe $S > 0$ tel que

Définition 7

On dit que la méthode est <u>stable</u> s'il existe $S > 0$ tel que pour toute subdiv. $(t_0, \ldots, t_N)$ de $[t_0, t_0 + T]$,

III. Consistance, stabilité et convergence

Définition 7

On dit que la méthode est stable s'il existe $S > 0$ tel que pour toute subdiv. $(t_0, \ldots, t_N)$ de $[t_0, t_0 + T]$, pour tous $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N \in [0; +\infty[$,

Définition 7

On dit que la méthode est <u>stable</u> s'il existe $S > 0$ tel que pour toute subdiv. $(t_0, \ldots, t_N)$ de $[t_0, t_0 + T]$, pour tous $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N \in [0; +\infty[$, si $y_1, \ldots, y_N$ et $\widetilde{y}_0, \ldots, \widetilde{y}_N$ sont définis par

$$\forall n \in \{0, \ldots, N-1\},\ y_{n+1} = y_n + h_n\phi(t_n, y_n, h_n)$$

Définition 7

On dit que la méthode est stable s'il existe $S > 0$ tel que pour toute subdiv. $(t_0, \dots, t_N)$ de $[t_0, t_0 + T]$, pour tous $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N \in [0; +\infty[$, si $y_1, \dots, y_N$ et $\widetilde{y}_0, \dots, \widetilde{y}_N$ sont définis par

$$\forall n \in \{0, \dots, N-1\},\ y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n)$$

et

$$\begin{cases} \widetilde{y}_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \{0, \dots, N-1\},\ \widetilde{y}_{n+1} = \widetilde{y}_n + h_n \phi(t_n, \widetilde{y}_n, h_n) + \epsilon_{n+1} \end{cases}$$

Définition 7

On dit que la méthode est stable s'il existe $S > 0$ tel que pour toute subdiv. $(t_0, \ldots, t_N)$ de $[t_0, t_0 + T]$, pour tous $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N \in [0; +\infty[$, si $y_1, \ldots, y_N$ et $\widetilde{y}_0, \ldots, \widetilde{y}_N$ sont définis par

$$\forall n \in \{0, \ldots, N-1\},\ y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n)$$

et

$$\begin{cases} \widetilde{y}_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \{0, \ldots, N-1\},\ \widetilde{y}_{n+1} = \widetilde{y}_n + h_n \phi(t_n, \widetilde{y}_n, h_n) + \epsilon_{n+1} \end{cases}$$

on a

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\widetilde{y}_n - y_n| \leq S \sum_{i=0}^{N} |\epsilon_i|$$

Définition 7

On dit que la méthode est stable s'il existe $S > 0$ tel que pour toute subdiv. $(t_0, \dots, t_N)$ de $[t_0, t_0 + T]$, pour tous $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N \in [0; +\infty[$, si $y_1, \dots, y_N$ et $\widetilde{y}_0, \dots, \widetilde{y}_N$ sont définis par

$$\forall n \in \{0, \dots, N-1\},\ y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n)$$

et

$$\begin{cases} \widetilde{y}_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \{0, \dots, N-1\},\ \widetilde{y}_{n+1} = \widetilde{y}_n + h_n \phi(t_n, \widetilde{y}_n, h_n) + \epsilon_{n+1} \end{cases}$$

on a

$$\max_{0 \le n \le N} |\widetilde{y}_n - y_n| \le S \sum_{i=0}^{N} |\epsilon_i|$$

où $\epsilon_0 := |\widetilde{y}_0 - y_0|$.

III. Consistance, stabilité et convergence

Soient $y_1, \ldots, y_N$ les réels définis par

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n), \;\; n \in \{0, \ldots, N-1\},$$

Soient $y_1, \ldots, y_N$ les réels définis par

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n), \;\; n \in \{0, \ldots, N-1\},$$

Définition 8

On dit que la méthode est convergente

Soient $y_1, \dots, y_N$ les réels définis par

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n), \;\; n \in \{0, \dots, N-1\},$$

Définition 8

On dit que la méthode est <u>convergente</u> si l'<u>erreur globale</u>

$$E(t_0, \dots, t_N) := \max_{1 \le n \le N} |y_n - y(t_n)| \,.$$

III. Consistance, stabilité et convergence

Soient $y_1, \dots, y_N$ les réels définis par

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n), \ \ n \in \{0, \dots, N-1\},$$

Définition 8

On dit que la méthode est <u>convergente</u> si l'<u>erreur globale</u>

$$E(t_0, \dots, t_N) := \max_{1 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \, .$$

tend vers 0 quand h tend vers 0.

III. Consistance, stabilité et convergence

Soient $y_1, \ldots, y_N$ les réels définis par

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n), \;\; n \in \{0, \ldots, N-1\},$$

Définition 8

On dit que la méthode est <u>convergente</u> si l'<u>erreur globale</u>

$$E(t_0, \ldots, t_N) := \max_{1 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \,.$$

tend vers 0 quand h tend vers 0.

Une condition <u>suffisante</u> de convergence est :

Soient $y_1, \ldots, y_N$ les réels définis par

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n), \;\; n \in \{0, \ldots, N-1\},$$

Définition 8

On dit que la méthode est convergente si l'erreur globale

$$E(t_0, \ldots, t_N) := \max_{1 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \,.$$

tend vers 0 quand h tend vers 0.

Une condition suffisante de convergence est :

Proposition 9

Si la méthode est consistante et stable, alors elle est convergente.

III. Consistance, stabilité et convergence

Si la méthode est stable et consistante, la *vitesse de convergence* est donnée par l'*ordre de grandeur* de l'erreur de consistance :

III. Consistance, stabilité et convergence

Si la méthode est stable et consistante, la *vitesse de convergence* est donnée par l'*ordre de grandeur* de l'erreur de consistance :

Définition 10

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

III. Consistance, stabilité et convergence

Si la méthode est stable et consistante, la *vitesse de convergence* est donnée par l'*ordre de grandeur* de l'erreur de consistance :

Définition 10

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On dit que la méthode est d'ordre de consistance au moins p

Si la méthode est stable et consistante, la *vitesse de convergence* est donnée par l'*ordre de grandeur* de l'erreur de consistance :

Définition 10

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On dit que la méthode est d'ordre de consistance au moins p s'il existe $M \geq 0$ telle que

$$e(t_0, \ldots, t_N) \leq h^p M.$$

Si la méthode est stable et consistante, la *vitesse de convergence* est donnée par l'*ordre de grandeur* de l'erreur de consistance :

Définition 10

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On dit que la méthode est d'ordre de consistance au moins p s'il existe $M \geq 0$ telle que

$$e(t_0, \ldots, t_N) \leq h^p M.$$

Remarque : Si la méthode est d'ordre de consistance au moins 1, alors elle est consistante.

III. Consistance, stabilité et convergence

Si la méthode est stable et consistante, la *vitesse de convergence* est donnée par l'*ordre de grandeur* de l'erreur de consistance :

Définition 10

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On dit que la méthode est <u>d'ordre de consistance au moins p</u> s'il existe $M \geq 0$ telle que

$$e(t_0, \dots, t_N) \leq h^p M.$$

<u>Remarque :</u> Si la méthode est d'ordre de consistance au moins 1, alors elle est consistante.

Exemple

La méthode de Taylor d'ordre $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est d'ordre de consistance au moins p.

Si la méthode est stable et consistante, la *vitesse de convergence* est donnée par l'*ordre de grandeur* de l'erreur de consistance :

Définition 10

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On dit que la méthode est d'ordre de consistance au moins p s'il existe $M \geq 0$ telle que

$$e(t_0, \ldots, t_N) \leq h^p M.$$

Remarque : Si la méthode est d'ordre de consistance au moins 1, alors elle est consistante.

Exemple

La méthode de Taylor d'ordre $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est d'ordre de consistance au moins p.

Conséquence :

Si la méthode est stable et consistante, la *vitesse de convergence* est donnée par l'*ordre de grandeur* de l'erreur de consistance :

Définition 10

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On dit que la méthode est d'ordre de consistance au moins p s'il existe $M \geq 0$ telle que

$$e(t_0, \ldots, t_N) \leq h^p M.$$

Remarque : Si la méthode est d'ordre de consistance au moins 1, alors elle est consistante.

Exemple

La méthode de Taylor d'ordre $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est d'ordre de consistance au moins p.

Conséquence : Les méthodes d'Euler et de Taylor sont consistantes.

Par ailleurs :

Par ailleurs :

Théorème 11

Si

Par ailleurs :

Théorème 11

Si

- f est de classe $\mathcal{C}^p$,

Par ailleurs :

Théorème 11

Si

- f est de classe $\mathcal{C}^p$,
- ϕ est de classe $\mathcal{C}^p$ par rapport à sa troisième variable,

III. Consistance, stabilité et convergence

Par ailleurs :

Théorème 11

Si

- f est de classe $\mathcal{C}^p$,
- ϕ est de classe $\mathcal{C}^p$ par rapport à sa troisième variable,
- $\forall k \in \{0, \dots, p-1\}$, $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^k \phi}{\partial \kappa^k}(t, \gamma, 0) = \frac{1}{k+1} f^{[k]}(t, \gamma),$$

Par ailleurs :

Théorème 11

Si

- f est de classe $\mathcal{C}^p$,
- ϕ est de classe $\mathcal{C}^p$ par rapport à sa troisième variable,
- $\forall k \in \{0, \ldots, p-1\}$, $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^k \phi}{\partial \kappa^k}(t, \gamma, 0) = \frac{1}{k+1} f^{[k]}(t, \gamma),$$

- la subdivision $(t_0, \ldots, t_N)$ de $[t_0, t_0 + T]$ est régulière,

Par ailleurs :

Théorème 11

Si

- f est de classe $\mathcal{C}^p$,
- ϕ est de classe $\mathcal{C}^p$ par rapport à sa troisième variable,
- $\forall k \in \{0, \dots, p-1\}$, $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^k \phi}{\partial \kappa^k}(t, \gamma, 0) = \frac{1}{k+1} f^{[k]}(t, \gamma),$$

- la subdivision $(t_0, \dots, t_N)$ de $[t_0, t_0 + T]$ est régulière,

alors la méthode est d'ordre de consistance au moins p.

Une condition suffisante de stabilité est :

Une condition suffisante de stabilité est :

Théorème 12

Si ϕ est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable i.e.

Une condition suffisante de stabilité est :

Théorème 12

Si ϕ est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable i.e. il existe $C > 0$ telle que $\forall t \in I$, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$|\phi(t, y_1, \kappa) - \phi(t, y_2, \kappa)| \leq C|y_1 - y_2|,$$

III. Consistance, stabilité et convergence

Une condition suffisante de stabilité est :

Théorème 12

Si ϕ est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable i.e. il existe $C > 0$ telle que $\forall t \in I$, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$|\phi(t, y_1, \kappa) - \phi(t, y_2, \kappa)| \leq C|y_1 - y_2|,$$

alors la méthode est stable.

III. Consistance, stabilité et convergence

Une condition suffisante de stabilité est :

Théorème 12

Si ϕ est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable i.e. il existe $C > 0$ telle que $\forall t \in I$, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$|\phi(t, y_1, \kappa) - \phi(t, y_2, \kappa)| \leq C|y_1 - y_2|,$$

alors la méthode est stable.

Conséquence :

Une condition suffisante de stabilité est :

Théorème 12

Si ϕ est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable i.e. il existe $C > 0$ telle que $\forall t \in I$, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$|\phi(t, y_1, \kappa) - \phi(t, y_2, \kappa)| \leq C|y_1 - y_2|,$$

alors la méthode est stable.

Conséquence : Si f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, la méthode d'Euler associée est convergente.

IV. Méthodes de Runge-Kutta

On considère des méthodes construites à l'aide de formules d'intégration numérique.

IV. Méthodes de Runge-Kutta

On considère des méthodes construites à l'aide de formules d'intégration numérique.

- Soient $c_1, \dots, c_q \in [0;1]$ tels que $0 = c_1 \leq \cdots \leq c_q \leq 1$.

IV. Méthodes de Runge-Kutta

On considère des méthodes construites à l'aide de formules d'intégration numérique.

- Soient $c_1, \ldots, c_q \in [0;1]$ tels que $0 = c_1 \leq \cdots \leq c_q \leq 1$.
- On pose $t_{n,i} := t_n + c_i h_n$, $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, $i \in \{1, \ldots, q\}$.

IV. Méthodes de Runge-Kutta

On considère des méthodes construites à l'aide de formules d'intégration numérique.

- Soient $c_1, \ldots, c_q \in [0;1]$ tels que $0 = c_1 \leq \cdots \leq c_q \leq 1$.
- On pose $t_{n,i} := t_n + c_i h_n$, $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, $i \in \{1, \ldots, q\}$.
- Soient $b_1, \ldots, b_q \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$.

IV. Méthodes de Runge-Kutta

On considère des méthodes construites à l'aide de formules d'intégration numérique.

- Soient $c_1, \dots, c_q \in [0;1]$ tels que $0 = c_1 \leq \dots \leq c_q \leq 1$.
- On pose $t_{n,i} := t_n + c_i h_n$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$, $i \in \{1, \dots, q\}$.
- Soient $b_1, \dots, b_q \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$.
- Pour $i \in \{2, \dots, q\}$, soient $a_{i,1}, \dots, a_{i,i-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} = c_i$.

IV. Méthodes de Runge-Kutta

Construction

Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$.

Construction

Soit $n \in \{0, \ldots, N-1\}$. On pose

Construction

Soit $n \in \{0, \ldots, N-1\}$. On pose

$$\begin{cases} y_{n,1} := y_n \end{cases}$$

Construction

Soit $n \in \{0, \ldots, N-1\}$. On pose

$$\begin{cases} y_{n,1} & := y_n \\ y_{n,2} & := y_n + h_n a_{2,1} f\left(t_n, y_n\right) \\ & \\ & \\ & \\ & \end{cases}$$

Construction

Soit $n \in \{0, \ldots, N-1\}$. On pose

$$\begin{cases} y_{n,1} & := y_n \\ y_{n,2} & := y_n + h_n a_{2,1} f\left(t_n, y_n\right) \\ y_{n,3} & := y_n + h_n a_{3,1} f\left(t_n, y_n\right) + h_n a_{3,2} f\left(t_{n,2}, y_{n,2}\right) \end{cases}$$

IV. Méthodes de Runge-Kutta

Construction

Soit $n \in \{0, \ldots, N-1\}$. On pose

$$\begin{cases} y_{n,1} & := y_n \\ y_{n,2} & := y_n + h_n a_{2,1} f\left(t_n, y_n\right) \\ y_{n,3} & := y_n + h_n a_{3,1} f\left(t_n, y_n\right) + h_n a_{3,2} f\left(t_{n,2}, y_{n,2}\right) \\ & \vdots \\ y_{n,q} & := y_n + h_n \displaystyle\sum_{j=1}^{q-1} a_{q,j} f\left(t_{n,j}, y_{n,j}\right) \end{cases}$$

IV. Méthodes de Runge-Kutta

Construction

Soit $n \in \{0, \ldots, N-1\}$. On pose

$$\begin{cases} y_{n,1} & := y_n \\ y_{n,2} & := y_n + h_n a_{2,1} f\left(t_n, y_n\right) \\ y_{n,3} & := y_n + h_n a_{3,1} f\left(t_n, y_n\right) + h_n a_{3,2} f\left(t_{n,2}, y_{n,2}\right) \\ & \vdots \\ y_{n,q} & := y_n + h_n \sum_{j=1}^{q-1} a_{q,j} f\left(t_{n,j}, y_{n,j}\right) \end{cases}$$

puis le réel

$$y_{n+1} := y_n + h_n \sum_{i=1}^{q} b_i f\left(t_{n,i}, y_{n,i}\right).$$

Définition 13

Cette méthode est appelée méthode de Runge-Kutta

Définition 13

Cette méthode est appelée méthode de Runge-Kutta associée aux nœuds $c_1, \dots, c_q$,

IV. Méthodes de Runge-Kutta

Définition 13

Cette méthode est appelée méthode de Runge-Kutta associée aux nœuds $c_1, \ldots, c_q$, aux poids $b_1, \ldots, b_q$

Définition 13

Cette méthode est appelée méthode de Runge-Kutta associée aux nœuds $c_1, \ldots, c_q$, aux poids $b_1, \ldots, b_q$ et aux coefficients de Runge-Kutta $a_{i,j}$, $i \in \{2, \ldots, q\}$, $j \in \{1, \ldots, i-1\}$.

Définition 13

Cette méthode est appelée <u>méthode de Runge-Kutta</u> associée aux <u>nœuds</u> $c_1, \dots, c_q$, aux <u>poids</u> $b_1, \dots, b_q$ et aux <u>coefficients de Runge-Kutta</u> $a_{i,j}$, $i \in \{2, \dots, q\}$, $j \in \{1, \dots, i-1\}$.

On réunit ces paramètres sous la forme du tableau

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{2,1} & & & & \\
c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & & & \\
\vdots & & & \ddots & & \\
c_q & a_{q,1} & a_{q,2} & \cdots & a_{q,q-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{q-1} & b_q
\end{array}$$

IV. Méthodes de Runge-Kutta

Définition 13

Cette méthode est appelée méthode de Runge-Kutta associée aux nœuds $c_1, \dots, c_q$, aux poids $b_1, \dots, b_q$ et aux coefficients de Runge-Kutta $a_{i,j}$, $i \in \{2, \dots, q\}$, $j \in \{1, \dots, i-1\}$.
On réunit ces paramètres sous la forme du tableau

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{2,1} & & & & \\
c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & & & \\
\vdots & & & \ddots & & \\
c_q & a_{q,1} & a_{q,2} & \cdots & a_{q,q-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{q-1} & b_q
\end{array}$$

appelé tableau de Butcher.

Théorème 14

- Les méthodes de Runge-Kutta sont consistantes.

IV. Méthodes de Runge-Kutta

Théorème 14

- Les méthodes de Runge-Kutta sont consistantes.
- Si f est lipschitzienne en sa deuxième variable, elles sont stables.

Théorème 14

- Les méthodes de Runge-Kutta sont consistantes.
- Si f est lipschitzienne en sa deuxième variable, elles sont stables.

Conséquence : Si f est lipschitzienne en sa deuxième variable, les méthodes de Runge-Kutta sont convergentes.