Chapitre 3 : Méthode des moindres carrés

I. Introduction

I. Introduction

Soit $N \in \mathbb{N}$ "grand"

I. Introduction

Soit $N \in \mathbb{N}$ "grand" et

$$\mathcal{N} = \{(x_0, y_0), \ldots, (x_N, y_N)\}$$

un *nuage de points* de $\mathbb{R}^2$ d'abscisses deux à deux distinctes.

I. Introduction

Soit $N \in \mathbb{N}$ "grand" et

$$\mathcal{N} = \{(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)\}$$

un *nuage de points* de $\mathbb{R}^2$ d'abscisses deux à deux distinctes.

<u>But :</u>

I. Introduction

Soit $N \in \mathbb{N}$ "grand" et

$$\mathcal{N} = \{(x_0, y_0), \ldots, (x_N, y_N)\}$$

un *nuage de points* de $\mathbb{R}^2$ d'abscisses deux à deux distinctes.

But : Approcher $\mathcal{N}$ *au sens des moindres carrés* par un polynôme de $\mathbb{R}_m[X]$ avec $m << N$.

II. Approximation au sens des moindres carrés

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq N$.

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq N$. Soit $S \in \mathbb{R}_m[X]$.

II. Approximation au sens des moindres carrés

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq N$. Soit $S \in \mathbb{R}_m[X]$.

Définition 1

On dit que S est une solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ si

II. Approximation au sens des moindres carrés

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq N$. Soit $S \in \mathbb{R}_m[X]$.

Définition 1

On dit que S est une solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ si

$$\sum_{i=0}^{N} \left(y_i - S(x_i)\right)^2 = \min \left\{ \sum_{i=0}^{N} \left(y_i - R(x_i)\right)^2 \mid R \in \mathbb{R}_m[X] \right\}.$$

II. Approximation au sens des moindres carrés

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq N$. Soit $S \in \mathbb{R}_m[X]$.

Définition 1

On dit que S est une solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ si

$$\sum_{i=0}^{N} \big(y_i - S(x_i)\big)^2 = \min \left\{ \sum_{i=0}^{N} \big(y_i - R(x_i)\big)^2 \;\middle|\; R \in \mathbb{R}_m[X] \right\}.$$

Nous allons montrer qu'une telle solution

II. Approximation au sens des moindres carrés

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq N$. Soit $S \in \mathbb{R}_m[X]$.

Définition 1

On dit que S est une solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ si

$$\sum_{i=0}^{N} \big(y_i - S(x_i)\big)^2 = \min \left\{ \sum_{i=0}^{N} \big(y_i - R(x_i)\big)^2 \;\middle|\; R \in \mathbb{R}_m[X] \right\}.$$

Nous allons montrer qu'une telle solution

- existe,

II. Approximation au sens des moindres carrés

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq N$. Soit $S \in \mathbb{R}_m[X]$.

Définition 1

On dit que S est une solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ si

$$\sum_{i=0}^{N} \left(y_i - S(x_i)\right)^2 = \min \left\{ \sum_{i=0}^{N} \left(y_i - R(x_i)\right)^2 \mid R \in \mathbb{R}_m[X] \right\}.$$

Nous allons montrer qu'une telle solution

- existe,
- est unique,

II. Approximation au sens des moindres carrés

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq N$. Soit $S \in \mathbb{R}_m[X]$.

Définition 1

On dit que S est une solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ si

$$\sum_{i=0}^{N} \left(y_i - S(x_i)\right)^2 = \min \left\{ \sum_{i=0}^{N} \left(y_i - R(x_i)\right)^2 \mid R \in \mathbb{R}_m[X] \right\}.$$

Nous allons montrer qu'une telle solution

- existe,
- est unique,
- peut être déterminée explicitement.

II. Approximation au sens des moindres carrés

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_N[X]$, on note $\langle P, Q\rangle := \sum_{i=0}^{N} P(x_i)Q(x_i)$.

II. Approximation au sens des moindres carrés

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_N[X]$, on note $\langle P, Q\rangle := \sum_{i=0}^{N} P(x_i)Q(x_i)$.

Proposition 2

L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_N[X] \times \mathbb{R}_N[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \langle P, Q\rangle \end{array}$ est un produit scalaire.

II. Approximation au sens des moindres carrés

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_N[X]$, on note $\langle P, Q \rangle := \sum_{i=0}^{N} P(x_i)Q(x_i)$.

Proposition 2

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_N[X] \times \mathbb{R}_N[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \langle P, Q \rangle \end{array}$ est un produit scalaire.

On note

II. Approximation au sens des moindres carrés

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_N[X]$, on note $\langle P, Q\rangle := \sum_{i=0}^{N} P(x_i)Q(x_i)$.

Proposition 2

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_N[X] \times \mathbb{R}_N[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \langle P, Q\rangle \end{array}$ est un produit scalaire.

On note

- $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

II. Approximation au sens des moindres carrés

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_N[X]$, on note $\langle P, Q \rangle := \sum_{i=0}^{N} P(x_i)Q(x_i)$.

Proposition 2

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_N[X] \times \mathbb{R}_N[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \langle P, Q \rangle \end{array}$ est un produit scalaire.

On note

- $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$,
- d la distance euclidienne associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

II. Approximation au sens des moindres carrés

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_N[X]$, on note $\langle P, Q \rangle := \sum_{i=0}^{N} P(x_i)Q(x_i)$.

Proposition 2

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_N[X] \times \mathbb{R}_N[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \langle P, Q \rangle \end{array}$ est un produit scalaire.

On note

- $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$,
- d la distance euclidienne associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Remarque

Si on note $P_{\mathcal{N}}$ le polynôme d'interpolation des points de $\mathcal{N}$,

II. Approximation au sens des moindres carrés

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_N[X]$, on note $\langle P, Q\rangle := \sum_{i=0}^{N} P(x_i)Q(x_i)$.

Proposition 2

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_N[X] \times \mathbb{R}_N[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \langle P, Q\rangle \end{array}$ est un produit scalaire.

On note

- $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$,
- d la distance euclidienne associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Remarque

Si on note $P_{\mathcal{N}}$ le polynôme d'interpolation des points de $\mathcal{N}$, on a, pour tout $R \in \mathbb{R}_m[X] \subset \mathbb{R}_N[X]$,

II. Approximation au sens des moindres carrés

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_N[X]$, on note $\langle P, Q\rangle := \sum_{i=0}^{N} P(x_i)Q(x_i)$.

Proposition 2

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_N[X] \times \mathbb{R}_N[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \langle P, Q\rangle \end{array}$ est un produit scalaire.

On note

- $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$,
- d la distance euclidienne associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Remarque

Si on note $P_{\mathcal{N}}$ le polynôme d'interpolation des points de $\mathcal{N}$, on a, pour tout $R \in \mathbb{R}_m[X] \subset \mathbb{R}_N[X]$,

$$\sum_{i=0}^{N} \big(y_i - R(x_i)\big)^2 = d(P_{\mathcal{N}}, R)^2.$$

II. Approximation au sens des moindres carrés

Proposition 3

S est une solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ ssi

II. Approximation au sens des moindres carrés

Proposition 3

S est une solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ ssi

$$d(P_{\mathcal{N}}, S) = \min \{ d(P_{\mathcal{N}}, R) \mid R \in \mathbb{R}_m[X] \}$$

II. Approximation au sens des moindres carrés

Proposition 3

S est une solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ ssi

$$d(P_{\mathcal{N}}, S) = \min\left\{d(P_{\mathcal{N}}, R) \mid R \in \mathbb{R}_m[X]\right\} = d\left(P_{\mathcal{N}}, p_{\mathbb{R}_m[X]}(P_{\mathcal{N}})\right)$$

Proposition 3

S est une solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ ssi

$$d(P_{\mathcal{N}}, S) = \min \left\{ d(P_{\mathcal{N}}, R) \mid R \in \mathbb{R}_m[X] \right\} = d\left(P_{\mathcal{N}}, p_{\mathbb{R}_m[X]}(P_{\mathcal{N}})\right)$$

ssi

$$S = p_{\mathbb{R}_m[X]}(P_{\mathcal{N}}).$$

III. Calcul de la solution au problème des moindres carrés

III. Calcul de la solution au problème des moindres carrés

Si $S = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$,

III. Calcul de la solution au problème des moindres carrés

Si $S = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$, on note $V := \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$.

III. Calcul de la solution au problème des moindres carrés

Si $S = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$, on note $V := \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 4

S est la solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ ssi

III. Calcul de la solution au problème des moindres carrés

Si $S = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$, on note $V := \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 4

S est la solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ ssi

$$^tCCV = {}^tCY$$

III. Calcul de la solution au problème des moindres carrés

Si $S = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$, on note $V := \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 4

S est la solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ ssi

$$ {}^t CCV = {}^t CY $$

où

$$ C := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y := \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}. $$

III. Calcul de la solution au problème des moindres carrés

Si $S = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$, on note $V := \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 4

S est la solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ ssi

$$^tCCV = {}^tCY$$

où

$$C := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y := \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

Remarque :

III. Calcul de la solution au problème des moindres carrés

Si $S = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$, on note $V := \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 4

S est <u>la</u> solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ ssi

$$^t CCV = {}^t CY$$

où

$$C := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y := \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

<u>Remarque :</u> $^t CC \in \mathrm{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ est inversible

III. Calcul de la solution au problème des moindres carrés

Si $S = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$, on note $V := \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 4

S est la solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ ssi

$$ {}^t CCV = {}^t CY $$

où

$$ C := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y := \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}. $$

Remarque : ${}^t CC \in \mathrm{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ est inversible et le vecteur colonne des coordonnées du polynôme $p_{\mathbb{R}_m[X]}(P_{\mathcal{N}})$ dans la base $\{1, X, \ldots, X^m\}$ de $\mathbb{R}_m[X]$ est donc

III. Calcul de la solution au problème des moindres carrés

Si $S = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$, on note $V := \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 4

S est <u>la</u> solution d'ordre m au problème des moindres carrés associé à $\mathcal{N}$ ssi

$$^tCCV = {}^tCY$$

où

$$C := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y := \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

<u>Remarque :</u> ${}^tCC \in \mathrm{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ est inversible et le vecteur colonne des coordonnées du polynôme $p_{\mathbb{R}_m[X]}(P_{\mathcal{N}})$ dans la base $\{1, X, \ldots, X^m\}$ de $\mathbb{R}_m[X]$ est donc

$$\left({}^tCC\right)^{-1} {}^tCY.$$

Exemple :

Exemple : La droite de régression linéaire associée à $\mathcal{N}$

Exemple : La droite de régression linéaire associée à $\mathcal{N}$ est le polynôme

$$a_0 + a_1 X$$

Exemple : La droite de régression linéaire associée à $\mathcal{N}$ est le polynôme

$$a_0 + a_1 X$$

où

III. Calcul de la solution au problème des moindres carrés

Exemple : La droite de régression linéaire associée à $\mathcal{N}$ est le polynôme

$$a_0 + a_1 X$$

où

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{i=0}^{N} x_i^2\right)\left(\sum_{i=0}^{N} y_i\right) - \left(\sum_{i=0}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=0}^{N} x_i y_i\right)}{(N+1)\sum_{i=0}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{N} x_i\right)^2}$$

et

$$a_1 = \frac{-\left(\sum_{i=0}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=0}^{N} y_i\right) + (N+1)\left(\sum_{i=0}^{N} x_i y_i\right)}{(N+1)\sum_{i=0}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{N} x_i\right)^2}.$$