

Chapitre 4 : Intégration numérique

I. Introduction

I. Introduction

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$

I. Introduction

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable.

I. Introduction

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable.

But :

I. Introduction

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable.

But : Approcher $\int_a^b f(t)dt$ par une expression *facilement calculable*.

II. Formules de quadrature

II. Formules de quadrature

On note $\mathcal{RI}([a, b])$ le \mathbb{R} -ev des fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$.

II. Formules de quadrature

On note $\mathcal{RI}([a, b])$ le \mathbb{R} -ev des fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$.

Définition 1

Une formule de quadrature sur $[a, b]$ est une forme linéaire

$$J : \mathcal{RI}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}.$$

II. Formules de quadrature

On note $\mathcal{RI}([a, b])$ le \mathbb{R} -ev des fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$.

Définition 1

Une formule de quadrature sur $[a, b]$ est une forme linéaire

$$J : \mathcal{RI}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Exemple :

II. Formules de quadrature

On note $\mathcal{RI}([a, b])$ le \mathbb{R} -ev des fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$.

Définition 1

Une formule de quadrature sur $[a, b]$ est une forme linéaire

$$J : \mathcal{RI}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Exemple : Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$.

II. Formules de quadrature

On note $\mathcal{RI}([a, b])$ le \mathbb{R} -ev des fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$.

Définition 1

Une formule de quadrature sur $[a, b]$ est une forme linéaire

$$J : \mathcal{RI}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Exemple : Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{RI}([a, b]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) \end{array}$$

est une formule de quadrature sur $[a, b]$.

II. Formules de quadrature

Soient $c_0, \dots, c_n \in [a, b]$ des centres deux à deux distincts,

II. Formules de quadrature

Soient $c_0, \dots, c_n \in [a, b]$ des centres deux à deux distincts, et $\{L_0, \dots, L_n\}$ la base de Lagrange associée.

II. Formules de quadrature

Soient $c_0, \dots, c_n \in [a, b]$ des centres deux à deux distincts, et $\{L_0, \dots, L_n\}$ la base de Lagrange associée.

Définition 2

La formule de quadrature

$$J_{c_0, \dots, c_n}^L : \begin{array}{ll} \mathcal{RI}([a, b]) & \rightarrow \\ g & \mapsto \sum_{i=0}^n \left(\int_a^b L_i(t) dt \right) g(c_i) \end{array}$$

II. Formules de quadrature

Soient $c_0, \dots, c_n \in [a, b]$ des centres deux à deux distincts, et $\{L_0, \dots, L_n\}$ la base de Lagrange associée.

Définition 2

La formule de quadrature

$$J_{c_0, \dots, c_n}^L : \begin{array}{ll} \mathcal{RI}([a, b]) & \rightarrow \\ g & \mapsto \sum_{i=0}^n \left(\int_a^b L_i(t) dt \right) g(c_i) \end{array}$$

est appelée formule de quadrature de Lagrange associée aux centres c_0, \dots, c_n .

II. Formules de quadrature

Soient $c_0, \dots, c_n \in [a, b]$ des centres deux à deux distincts, et $\{L_0, \dots, L_n\}$ la base de Lagrange associée.

Définition 2

La formule de quadrature

$$J_{c_0, \dots, c_n}^L : \begin{array}{ll} \mathcal{RI}([a, b]) & \rightarrow \mathbb{R} \\ g & \mapsto \sum_{i=0}^n \left(\int_a^b L_i(t) dt \right) g(c_i) \end{array}$$

est appelée formule de quadrature de Lagrange associée aux centres c_0, \dots, c_n .

Proposition 3

On a

$$J_{c_0, \dots, c_n}^L(f) = \int_a^b P_{f, c_0, \dots, c_n}(t) dt$$

II. Formules de quadrature

Proposition 3

On a

$$J_{c_0, \dots, c_n}^L(f) = \int_a^b P_{f, c_0, \dots, c_n}(t) dt$$

II. Formules de quadrature

Proposition 3

On a

$$J_{c_0, \dots, c_n}^L(f) = \int_a^b P_{f, c_0, \dots, c_n}(t) dt$$

Conséquence : Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$,

II. Formules de quadrature

Proposition 3

On a

$$J_{c_0, \dots, c_n}^L(f) = \int_a^b P_{f, c_0, \dots, c_n}(t) dt$$

Conséquence : Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, on a

$$\left| \int_a^b f(t) dt - J_{c_0, \dots, c_n}^L(f) \right| \leq (b-a) \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - c_i) \right|$$

II. Formules de quadrature

Proposition 3

On a

$$J_{c_0, \dots, c_n}^L(f) = \int_a^b P_{f, c_0, \dots, c_n}(t) dt$$

Conséquence : Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - J_{c_0, \dots, c_n}^L(f) \right| &\leq (b-a) \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - c_i) \right| \\ &\leq \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}. \end{aligned}$$

II. Formules de quadrature

Proposition 3

On a

$$J_{c_0, \dots, c_n}^L(f) = \int_a^b P_{f, c_0, \dots, c_n}(t) dt$$

Conséquence : Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - J_{c_0, \dots, c_n}^L(f) \right| &\leq (b-a) \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - c_i) \right| \\ &\leq \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}. \end{aligned}$$

Mais :

II. Formules de quadrature

Proposition 3

On a

$$J_{c_0, \dots, c_n}^L(f) = \int_a^b P_{f, c_0, \dots, c_n}(t) dt$$

Conséquence : Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - J_{c_0, \dots, c_n}^L(f) \right| &\leq (b-a) \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - c_i) \right| \\ &\leq \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}. \end{aligned}$$

Mais : cela n'assure pas la convergence vers $\int_a^b f(t) dt$!

II. Formules de quadrature

Lemme 4

Si les centres c_0, \dots, c_n sont équirépartis sur $[a, b]$,

II. Formules de quadrature

Lemme 4

Si les centres c_0, \dots, c_n sont équirépartis sur $[a, b]$, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$\int_a^b L_{n-i}(t) dt = \int_a^b L_i(t) dt,$$

II. Formules de quadrature

Lemme 4

Si les centres c_0, \dots, c_n sont équirépartis sur $[a, b]$, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$\int_a^b L_{n-i}(t) dt = \int_a^b L_i(t) dt,$$

$$\text{et } \int_a^b L_i(t) dt = \frac{b-a}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n (u-j) du.$$

II. Formules de quadrature

Soit J une formule de quadrature sur $[a, b]$.

II. Formules de quadrature

Soit J une formule de quadrature sur $[a, b]$.

Définition 5

On appelle ordre d'exactitude de J le plus grand entier $r \in \mathbb{N}$ tel que

II. Formules de quadrature

Soit J une formule de quadrature sur $[a, b]$.

Définition 5

On appelle ordre d'exactitude de J le plus grand entier $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_r[X], J(P) = \int_a^b P(t)dt.$$

II. Formules de quadrature

Soit J une formule de quadrature sur $[a, b]$.

Définition 5

On appelle ordre d'exactitude de J le plus grand entier $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_r[X], J(P) = \int_a^b P(t)dt.$$

Exemple : J_{c_0, \dots, c_n}^L est d'ordre d'exactitude au moins n .

III. Méthodes composées

III. Méthodes composées

On considère une *subdivision* (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$:

III. Méthodes composées

On considère une *subdivision* (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$:

$$a = x_0 < \dots < x_n = b.$$

III. Méthodes composées

On considère une *subdivision* (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$:

$$a = x_0 < \dots < x_n = b.$$

On appelle pas de la subdivision (x_0, \dots, x_n) le réel

$$\max_{i \in \{0, \dots, n-1\}} (x_{i+1} - x_i).$$

III. Méthodes composées

On considère une *subdivision* (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$:

$$a = x_0 < \dots < x_n = b.$$

On appelle pas de la subdivision (x_0, \dots, x_n) le réel

$$\max_{i \in \{0, \dots, n-1\}} (x_{i+1} - x_i).$$

Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, soit J_i une formule de quadrature sur $[x_i, x_{i+1}]$.

III. Méthodes composées

On considère une *subdivision* (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$:

$$a = x_0 < \dots < x_n = b.$$

On appelle pas de la subdivision (x_0, \dots, x_n) le réel

$$\max_{i \in \{0, \dots, n-1\}} (x_{i+1} - x_i).$$

Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, soit J_i une formule de quadrature sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Proposition et Définition 6

L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{RI}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \sum_{i=0}^{n-1} J_i(g|_{[x_i, x_{i+1}]}) \end{aligned}$$

III. Méthodes composées

On considère une *subdivision* (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$:

$$a = x_0 < \dots < x_n = b.$$

On appelle pas de la subdivision (x_0, \dots, x_n) le réel

$$\max_{i \in \{0, \dots, n-1\}} (x_{i+1} - x_i).$$

Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, soit J_i une formule de quadrature sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Proposition et Définition 6

L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{RI}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \sum_{i=0}^{n-1} J_i(g|_{[x_i, x_{i+1}]}) \end{aligned}$$

est une formule de quadrature sur $[a, b]$, appelée formule de quadrature composée à partir de J_0, \dots, J_{n-1} .

III. Méthodes composées

Exemple :

III. Méthodes composées

Exemple : Pour $i \in \{0, \dots, n - 1\}$, soit $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$

III. Méthodes composées

Exemple : Pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$, soit $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et considérons l'application

$$J_i : \begin{array}{ccc} \mathcal{RI}([x_i, x_{i+1}]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(c_i) dt = f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \end{array}$$

III. Méthodes composées

Exemple : Pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$, soit $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et considérons l'application

$$J_i : \begin{array}{ccc} \mathcal{RI}([x_i, x_{i+1}]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(c_i) dt = f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \end{array}$$

La formule de quadrature composée à partir de J_0, \dots, J_{n-1} est

III. Méthodes composées

Exemple : Pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$, soit $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et considérons l'application

$$J_i : \begin{array}{ccc} \mathcal{RI}([x_i, x_{i+1}]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(c_i) dt = f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \end{array}$$

La formule de quadrature composée à partir de J_0, \dots, J_{n-1} est

$$J_{c_0, \dots, c_{n-1}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{RI}([a, b]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(c_i) dt = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \end{array}$$

III. Méthodes composées

$$J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$,

III. Méthodes composées

$$J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0, \dots, x_{n-1}}$ est appelée méthode des rectangles à gauche :

III. Méthodes composées

$$J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0, \dots, x_{n-1}}$ est appelée méthode des rectangles à gauche : $R_g(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.

III. Méthodes composées

$$J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0, \dots, x_{n-1}}$ est appelée méthode des rectangles à gauche : $R_g(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_{i+1}$,

III. Méthodes composées

$$J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0, \dots, x_{n-1}}$ est appelée méthode des rectangles à gauche : $R_g(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_{i+1}$, $R_d := J_{x_1, \dots, x_n}$ est appelée méthode des rectangles à droite :

III. Méthodes composées

$$J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0, \dots, x_{n-1}}$ est appelée méthode des rectangles à gauche : $R_g(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_{i+1}$, $R_d := J_{x_1, \dots, x_n}$ est appelée méthode des rectangles à droite : $R_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$.

III. Méthodes composées

$$J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0, \dots, x_{n-1}}$ est appelée méthode des rectangles à gauche : $R_g(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_{i+1}$, $R_d := J_{x_1, \dots, x_n}$ est appelée méthode des rectangles à droite : $R_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$,

III. Méthodes composées

$$J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0, \dots, x_{n-1}}$ est appelée méthode des rectangles à gauche : $R_g(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_{i+1}$, $R_d := J_{x_1, \dots, x_n}$ est appelée méthode des rectangles à droite : $R_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $R_m := J_{c_0, \dots, c_{n-1}}$ est appelée méthode des points milieux :

III. Méthodes composées

$$J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0, \dots, x_{n-1}}$ est appelée méthode des rectangles à gauche : $R_g(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_{i+1}$, $R_d := J_{x_1, \dots, x_n}$ est appelée méthode des rectangles à droite : $R_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $R_m := J_{c_0, \dots, c_{n-1}}$ est appelée méthode des points milieux :

$$R_m(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i).$$

III. Méthodes composées

$$J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0, \dots, x_{n-1}}$ est appelée méthode des rectangles à gauche : $R_g(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_{i+1}$, $R_d := J_{x_1, \dots, x_n}$ est appelée méthode des rectangles à droite : $R_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $R_m := J_{c_0, \dots, c_{n-1}}$ est appelée méthode des points milieux :

$$R_m(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i).$$

Remarque : R_g et R_d sont d'ordre d'exactitude 0.

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$ est régulière

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$ est régulière i.e.
 $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$ est régulière i.e.
 $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$: le pas de (x_0, \dots, x_n) est
 $h_n := \frac{b-a}{n}$.

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$ est régulière i.e.
 $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$: le pas de (x_0, \dots, x_n) est
 $h_n := \frac{b-a}{n}$.

Proposition 8

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$,

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$ est régulière i.e.
 $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$: le pas de (x_0, \dots, x_n) est
 $h_n := \frac{b-a}{n}$.

Proposition 8

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, on a

$$\left| J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b-a)h_n \|f'\|_{\infty, [a, b]}.$$

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$ est régulière i.e. $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$: le pas de (x_0, \dots, x_n) est $h_n := \frac{b-a}{n}$.

Proposition 8

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, on a

$$\left| J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b-a)h_n \|f'\|_{\infty, [a, b]}.$$

Remarque :

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$ est régulière i.e. $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$: le pas de (x_0, \dots, x_n) est $h_n := \frac{b-a}{n}$.

Proposition 8

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, on a

$$\left| J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b-a)h_n \|f'\|_{\infty, [a, b]}.$$

Remarque : $J_{c_0^n, \dots, c_{n-1}^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$ est régulière i.e. $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$: le pas de (x_0, \dots, x_n) est $h_n := \frac{b-a}{n}$.

Proposition 8

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, on a

$$\left| J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b-a)h_n \|f'\|_{\infty, [a, b]}.$$

Remarque : $J_{c_0^n, \dots, c_{n-1}^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$

Proposition 9

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et $J = R_g$ ou R_d , on a

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision (x_0, \dots, x_n) de $[a, b]$ est régulière i.e. $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$: le pas de (x_0, \dots, x_n) est $h_n := \frac{b-a}{n}$.

Proposition 8

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, on a

$$\left| J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b-a)h_n \|f'\|_{\infty, [a, b]}.$$

Remarque : $J_{c_0^n, \dots, c_{n-1}^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$

Proposition 9

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et $J = R_g$ ou R_d , on a

$$\left| J(f) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{b-a}{2} h_n \|f'\|_{\infty, [a, b]}.$$

Proposition 10

Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$,

III. Méthodes composées

Proposition 10

Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, on a

$$\left| R_m(f) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{b-a}{24} h_n^2 \|f''\|_{\infty, [a, b]}.$$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$, on note

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$, on note

$$c_{i,j} := x_i + j \frac{x_{i+1} - x_i}{d}$$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$, on note

$$c_{i,j} := x_i + j \frac{x_{i+1} - x_i}{d} = x_i + j \frac{h_n}{d},$$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$, on note

$$c_{i,j} := x_i + j \frac{x_{i+1} - x_i}{d} = x_i + j \frac{h_n}{d},$$

puis

$$J_{d,i} := J_{c_{i,0}, \dots, c_{i,d}}^L.$$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$, on note

$$c_{i,j} := x_i + j \frac{x_{i+1} - x_i}{d} = x_i + j \frac{h_n}{d},$$

puis

$$J_{d,i} := J_{c_{i,0}, \dots, c_{i,d}}^L.$$

Définition 11

La formule de quadrature J_d sur $[a, b]$ composée à partir de $J_{d,0}, \dots, J_{d,n-1}$ est appelée méthode de Newton-Cotes d'ordre d .

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$, on note

$$c_{i,j} := x_i + j \frac{x_{i+1} - x_i}{d} = x_i + j \frac{h_n}{d},$$

puis

$$J_{d,i} := J_{c_{i,0}, \dots, c_{i,d}}^L.$$

Définition 11

La formule de quadrature J_d sur $[a, b]$ composée à partir de $J_{d,0}, \dots, J_{d,n-1}$ est appelée méthode de Newton-Cotes d'ordre d .

On a

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}(f|_{[x_i, x_{i+1}]}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^d \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt \right) f(c_{i,j})$$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$, on note

$$c_{i,j} := x_i + j \frac{x_{i+1} - x_i}{d} = x_i + j \frac{h_n}{d},$$

puis

$$J_{d,i} := J_{c_{i,0}, \dots, c_{i,d}}^L.$$

Définition 11

La formule de quadrature J_d sur $[a, b]$ composée à partir de $J_{d,0}, \dots, J_{d,n-1}$ est appelée méthode de Newton-Cotes d'ordre d .

On a

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}(f|_{[x_i, x_{i+1}]}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^d \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt \right) f(c_{i,j})$$

où, pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\{L_{i,0}, \dots, L_{i,d}\}$ la base de Lagrange associée aux centres $c_{i,0}, \dots, c_{i,d}$.

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}(f|_{[x_i, x_{i+1}]}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^d \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt \right) f(c_{i,j})$$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}(f|_{[x_i, x_{i+1}]}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^d \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt \right) f(c_{i,j})$$

Si $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et $j \in \{0, \dots, d\}$, on note $\omega_{i,j} := \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt$.

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}(f|_{[x_i, x_{i+1}]}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^d \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt \right) f(c_{i,j})$$

Si $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et $j \in \{0, \dots, d\}$, on note $\omega_{i,j} := \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt$.

Alors :

Lemme 12

$$\omega_{i,j} = \frac{h_n}{d} \frac{(-1)^{d-j}}{j!(d-j)!} \int_0^d \prod_{k=0, k \neq j}^d (u-k) du$$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}(f|_{[x_i, x_{i+1}]}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^d \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt \right) f(c_{i,j})$$

Si $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et $j \in \{0, \dots, d\}$, on note $\omega_{i,j} := \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt$.

Alors :

Lemme 12

$$\omega_{i,j} = \frac{h_n}{d} \frac{(-1)^{d-j}}{j!(d-j)!} \int_0^d \prod_{k=0, k \neq j}^d (u-k) du$$

et $\omega_j := \omega_{i,j}$ est donc indépendant de i .

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}(f_{[x_i, x_{i+1}]}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^d \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt \right) f(c_{i,j})$$

Si $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et $j \in \{0, \dots, d\}$, on note $\omega_{i,j} := \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt$.

Alors :

Lemme 12

$$\omega_{i,j} = \frac{h_n}{d} \frac{(-1)^{d-j}}{j!(d-j)!} \int_0^d \prod_{k=0, k \neq j}^d (u-k) du$$

et $\omega_j := \omega_{i,j}$ est donc indépendant de i .

Si on note $\omega'_j := \frac{\omega_j}{h_n}$,

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}(f|_{[x_i, x_{i+1}]}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^d \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt \right) f(c_{i,j})$$

Si $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et $j \in \{0, \dots, d\}$, on note $\omega_{i,j} := \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt$.

Alors :

Lemme 12

$$\omega_{i,j} = \frac{h_n}{d} \frac{(-1)^{d-j}}{j!(d-j)!} \int_0^d \prod_{k=0, k \neq j}^d (u-k) du$$

et $\omega_j := \omega_{i,j}$ est donc indépendant de i .

Si on note $\omega'_j := \frac{\omega_j}{h_n}$, ω'_j est indépendant de n .

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}(f|_{[x_i, x_{i+1}]}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^d \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt \right) f(c_{i,j})$$

Si $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et $j \in \{0, \dots, d\}$, on note $\omega_{i,j} := \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt$.

Alors :

Lemme 12

$$\omega_{i,j} = \frac{h_n}{d} \frac{(-1)^{d-j}}{j!(d-j)!} \int_0^d \prod_{k=0, k \neq j}^d (u-k) du$$

et $\omega_j := \omega_{i,j}$ est donc indépendant de i .

Si on note $\omega'_j := \frac{\omega_j}{h_n}$, ω'_j est indépendant de n .

Les nombres $\omega_0, \dots, \omega_d$ sont appelés les poids de la méthode J_d .

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}(f|_{[x_i, x_{i+1}]}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^d \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt \right) f(c_{i,j})$$

Si $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et $j \in \{0, \dots, d\}$, on note $\omega_{i,j} := \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t) dt$.

Alors :

Lemme 12

$$\omega_{i,j} = \frac{h_n}{d} \frac{(-1)^{d-j}}{j!(d-j)!} \int_0^d \prod_{k=0, k \neq j}^d (u-k) du$$

et $\omega_j := \omega_{i,j}$ est donc indépendant de i .

Si on note $\omega'_j := \frac{\omega_j}{h_n}$, ω'_j est indépendant de n .

Les nombres $\omega_0, \dots, \omega_d$ sont appelés les poids de la méthode J_d .

Remarque : $\forall j \in \{0, \dots, d\}$, $\omega_{d-j} = \omega_j$.

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$,

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt - J_d(f) \right| \leq h_n^{d+1} \frac{b-a}{(d+1)!} \left\| f^{(d+1)} \right\|_{\infty, [a, b]}.$$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt - J_d(f) \right| \leq h_n^{d+1} \frac{b-a}{(d+1)!} \left\| f^{(d+1)} \right\|_{\infty, [a, b]}.$$

Conséquence : $J_d^n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt - J_d(f) \right| \leq h_n^{d+1} \frac{b-a}{(d+1)!} \|f^{(d+1)}\|_{\infty, [a, b]}.$$

Conséquence : $J_d^n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$

Proposition 14

J_d est d'ordre d'exactitude au moins d .

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt - J_d(f) \right| \leq h_n^{d+1} \frac{b-a}{(d+1)!} \|f^{(d+1)}\|_{\infty, [a, b]}.$$

Conséquence : $J_d^n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$

Proposition 14

J_d est d'ordre d'exactitude au moins d .

Remarque :

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt - J_d(f) \right| \leq h_n^{d+1} \frac{b-a}{(d+1)!} \|f^{(d+1)}\|_{\infty, [a, b]}.$$

Conséquence : $J_d^n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$

Proposition 14

J_d est d'ordre d'exactitude au moins d .

Remarque : Il est possible de montrer que

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt - J_d(f) \right| \leq h_n^{d+1} \frac{b-a}{(d+1)!} \|f^{(d+1)}\|_{\infty, [a, b]}.$$

Conséquence : $J_d^n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$

Proposition 14

J_d est d'ordre d'exactitude au moins d .

Remarque : Il est possible de montrer que

- si d est impair, J_d est d'ordre d'exactitude d ,

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt - J_d(f) \right| \leq h_n^{d+1} \frac{b-a}{(d+1)!} \left\| f^{(d+1)} \right\|_{\infty, [a, b]}.$$

Conséquence : $J_d^n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$

Proposition 14

J_d est d'ordre d'exactitude au moins d .

Remarque : Il est possible de montrer que

- si d est impair, J_d est d'ordre d'exactitude d ,
- si d est pair, J_d est d'ordre d'exactitude $d + 1$.

V. La méthode des trapèzes

Définition 15

La méthode J_1 est appelée méthode des trapèzes.

V. La méthode des trapèzes

Définition 15

La méthode J_1 est appelée méthode des trapèzes.

On a

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1})) = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_0 f(x_i) + \omega_1 f(x_{i+1})).$$

V. La méthode des trapèzes

Définition 15

La méthode J_1 est appelée méthode des trapèzes.

On a

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1})) = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_0 f(x_i) + \omega_1 f(x_{i+1})).$$

Proposition 16

$$\omega_0 = \omega_1 = \frac{h_n}{2}.$$

V. La méthode des trapèzes

Définition 15

La méthode J_1 est appelée méthode des trapèzes.

On a

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1})) = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_0 f(x_i) + \omega_1 f(x_{i+1})).$$

Proposition 16

$$\omega_0 = \omega_1 = \frac{h_n}{2}.$$

On a donc

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} (x_{i+1} - x_i)$$

V. La méthode des trapèzes

Définition 15

La méthode J_1 est appelée méthode des trapèzes.

On a

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1})) = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_0 f(x_i) + \omega_1 f(x_{i+1})).$$

Proposition 16

$$\omega_0 = \omega_1 = \frac{h_n}{2}.$$

On a donc

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} (x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{2} (R_d(f) + R_g(f)).$$

V. La méthode des trapèzes

Définition 15

La méthode J_1 est appelée méthode des trapèzes.

On a

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1})) = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_0 f(x_i) + \omega_1 f(x_{i+1})).$$

Proposition 16

$$\omega_0 = \omega_1 = \frac{h_n}{2}.$$

On a donc

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} (x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{2} (R_d(f) + R_g(f)).$$

Remarque : L'ordre d'exactitude de J_1 est 1.

VI. La méthode de Simpson

Définition 17

La méthode J_2 est appelée méthode de Simpson.

VI. La méthode de Simpson

Définition 17

La méthode J_2 est appelée méthode de Simpson.

On a

$$J_2(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1}) + \omega_2 f(c_{i,2})).$$

VI. La méthode de Simpson

Définition 17

La méthode J_2 est appelée méthode de Simpson.

On a

$$J_2(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1}) + \omega_2 f(c_{i,2})).$$

Proposition 18

$$\omega_0 = \omega_2 = \frac{h_n}{6} \text{ et } \omega_1 = \frac{2}{3} h_n.$$

VI. La méthode de Simpson

Définition 17

La méthode J_2 est appelée méthode de Simpson.

On a

$$J_2(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1}) + \omega_2 f(c_{i,2})).$$

Proposition 18

$$\omega_0 = \omega_2 = \frac{h_n}{6} \text{ et } \omega_1 = \frac{2}{3} h_n.$$

On a donc

$$J_2(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6} f(x_i) + \frac{2}{3} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \frac{1}{6} f(x_{i+1}) \right) (x_{i+1} - x_i).$$

VI. La méthode de Simpson

Définition 17

La méthode J_2 est appelée méthode de Simpson.

On a

$$J_2(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1}) + \omega_2 f(c_{i,2})).$$

Proposition 18

$$\omega_0 = \omega_2 = \frac{h_n}{6} \text{ et } \omega_1 = \frac{2}{3} h_n.$$

On a donc

$$J_2(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6} f(x_i) + \frac{2}{3} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \frac{1}{6} f(x_{i+1}) \right) (x_{i+1} - x_i).$$

Remarque : L'ordre d'exactitude de J_2 est 3.

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Soit J la formule de quadrature sur $[a, b]$ donnée par

$$J(f) = \sum_{i=0}^N \lambda_i f(y_i),$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Soit J la formule de quadrature sur $[a, b]$ donnée par

$$J(f) = \sum_{i=0}^N \lambda_i f(y_i),$$

où $\lambda_0, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ et $y_0, \dots, y_N \in [a, b]$.

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Soit J la formule de quadrature sur $[a, b]$ donnée par

$$J(f) = \sum_{i=0}^N \lambda_i f(y_i),$$

où $\lambda_0, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ et $y_0, \dots, y_N \in [a, b]$. On note

$$E(f) := \int_a^b f(t) dt - J(f).$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Soit J la formule de quadrature sur $[a, b]$ donnée par

$$J(f) = \sum_{i=0}^N \lambda_i f(y_i),$$

où $\lambda_0, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ et $y_0, \dots, y_N \in [a, b]$. On note

$$E(f) := \int_a^b f(t) dt - J(f).$$

On a le résultat suivant :

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Théorème 19

Soit $r \in \mathbb{N}$.

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Théorème 19

Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b])$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Théorème 19

Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $f \in C^{r+1}([a, b])$ et que J est d'ordre d'exactitude au moins r .

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Théorème 19

Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $f \in C^{r+1}([a, b])$ et que J est d'ordre d'exactitude au moins r . Alors

$$E(f) = \frac{1}{r!} \int_a^b K_r(t) f^{(r+1)}(t) dt,$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Théorème 19

Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $f \in C^{r+1}([a, b])$ et que J est d'ordre d'exactitude au moins r . Alors

$$E(f) = \frac{1}{r!} \int_a^b K_r(t) f^{(r+1)}(t) dt,$$

où

$$K_r : \begin{array}{ll} [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto E(\psi_{r,t}) \end{array}$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Théorème 19

Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $f \in C^{r+1}([a, b])$ et que J est d'ordre d'exactitude au moins r . Alors

$$E(f) = \frac{1}{r!} \int_a^b K_r(t) f^{(r+1)}(t) dt,$$

où

$$K_r : \begin{array}{ll} [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto E(\psi_{r,t}) \end{array}$$

où, si $t \in [a, b]$,

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Théorème 19

Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $f \in C^{r+1}([a, b])$ et que J est d'ordre d'exactitude au moins r . Alors

$$E(f) = \frac{1}{r!} \int_a^b K_r(t) f^{(r+1)}(t) dt,$$

où

$$K_r : \begin{array}{l} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto E(\psi_{r,t}) \end{array}$$

où, si $t \in [a, b]$,

$$\psi_{r,t} : \begin{array}{l} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} (x-t)^r & \text{si } x-t \geq 0 \text{ i.e. si } x \geq t, \\ 0 & \text{sinon i.e. si } x < t. \end{cases} \end{array}$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Corollaire 20

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Corollaire 20

Avec les mêmes hypothèses,

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Corollaire 20

Avec les mêmes hypothèses,

$$|E(f)| \leq \frac{\|f^{(r+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{r!} \int_a^b |K_r(t)| dt.$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d .

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d . On a :

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d . On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t) dt = n \int_0^{h_n} \left(\int_0^{h_n} \psi_{r,u}(y) dy - \sum_{j=0}^d \omega_j \psi_{r,u} \left(j \frac{h_n}{d} \right) \right) du$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d . On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t) dt = n \int_0^{h_n} \left(\int_0^{h_n} \psi_{r,u}(y) dy - \sum_{j=0}^d \omega_j \psi_{r,u} \left(j \frac{h_n}{d} \right) \right) du$$

Exemples :

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d . On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t) dt = n \int_0^{h_n} \left(\int_0^{h_n} \psi_{r,u}(y) dy - \sum_{j=0}^d \omega_j \psi_{r,u} \left(j \frac{h_n}{d} \right) \right) du$$

Exemples :

- Si $d = 1$,

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d . On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t) dt = n \int_0^{h_n} \left(\int_0^{h_n} \psi_{r,u}(y) dy - \sum_{j=0}^d \omega_j \psi_{r,u} \left(j \frac{h_n}{d} \right) \right) du$$

Exemples :

- Si $d = 1$, $\int_a^b K_1(t) dt = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d . On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t) dt = n \int_0^{h_n} \left(\int_0^{h_n} \psi_{r,u}(y) dy - \sum_{j=0}^d \omega_j \psi_{r,u} \left(j \frac{h_n}{d} \right) \right) du$$

Exemples :

- Si $d = 1$, $\int_a^b K_1(t) dt = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.
- Si $d = 2$,

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d . On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t) dt = n \int_0^{h_n} \left(\int_0^{h_n} \psi_{r,u}(y) dy - \sum_{j=0}^d \omega_j \psi_{r,u} \left(j \frac{h_n}{d} \right) \right) du$$

Exemples :

- Si $d = 1$, $\int_a^b K_1(t) dt = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.
- Si $d = 2$, $\int_a^b K_3(t) dt = -\frac{(b-a)^5}{480n^4}$.

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d . On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t) dt = n \int_0^{h_n} \left(\int_0^{h_n} \psi_{r,u}(y) dy - \sum_{j=0}^d \omega_j \psi_{r,u} \left(j \frac{h_n}{d} \right) \right) du$$

Exemples :

- Si $d = 1$, $\int_a^b K_1(t) dt = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.
- Si $d = 2$, $\int_a^b K_3(t) dt = -\frac{(b-a)^5}{480n^4}$.

Remarque

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d . On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t) dt = n \int_0^{h_n} \left(\int_0^{h_n} \psi_{r,u}(y) dy - \sum_{j=0}^d \omega_j \psi_{r,u} \left(j \frac{h_n}{d} \right) \right) du$$

Exemples :

- Si $d = 1$, $\int_a^b K_1(t) dt = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.
- Si $d = 2$, $\int_a^b K_3(t) dt = -\frac{(b-a)^5}{480n^4}$.

Remarque

Il est possible de montrer que K_r est de signe constant,

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d . On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t) dt = n \int_0^{h_n} \left(\int_0^{h_n} \psi_{r,u}(y) dy - \sum_{j=0}^d \omega_j \psi_{r,u} \left(j \frac{h_n}{d} \right) \right) du$$

Exemples :

- Si $d = 1$, $\int_a^b K_1(t) dt = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.
- Si $d = 2$, $\int_a^b K_3(t) dt = -\frac{(b-a)^5}{480n^4}$.

Remarque

Il est possible de montrer que K_r est de signe constant, et donc

$$\int_a^b |K_r(t)| dt = \left| \int_a^b K_r(t) dt \right|.$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Conséquences :

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$,

VII. Estimation de l'erreur et nœuds de Peano

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$,
$$\left| \int_a^b f(t) dt - J_1(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f^{(2)}\|_{\infty, [a, b]}.$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, $\left| \int_a^b f(t)dt - J_1(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f^{(2)}\|_{\infty, [a, b]}$.
- Si $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$,

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, $\left| \int_a^b f(t)dt - J_1(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f^{(2)}\|_{\infty, [a, b]}$.
- Si $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, $\left| \int_a^b f(t)dt - J_2(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \|f^{(4)}\|_{\infty, [a, b]}$.

VII. Estimation de l'erreur et nœuds de Peano

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, $\left| \int_a^b f(t)dt - J_1(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f^{(2)}\|_{\infty, [a, b]}$.
- Si $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, $\left| \int_a^b f(t)dt - J_2(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \|f^{(4)}\|_{\infty, [a, b]}$.

On a en fait la généralisation suivante :

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, $\left| \int_a^b f(t)dt - J_1(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f^{(2)}\|_{\infty, [a, b]}$.
- Si $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, $\left| \int_a^b f(t)dt - J_2(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \|f^{(4)}\|_{\infty, [a, b]}$.

On a en fait la généralisation suivante :

Théorème 22

$$\int_a^b K_r(t)dt = \frac{(b-a)^{r+2}}{n^{r+1}} \left(\frac{1}{(r+1)(r+2)} - \frac{1}{d^{r+1}(r+1)} \sum_{j=0}^d \omega'_j j^{r+1} \right)$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, $\left| \int_a^b f(t)dt - J_1(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f^{(2)}\|_{\infty, [a, b]}$.
- Si $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, $\left| \int_a^b f(t)dt - J_2(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \|f^{(4)}\|_{\infty, [a, b]}$.

On a en fait la généralisation suivante :

Théorème 22

$$\int_a^b K_r(t)dt = \frac{(b-a)^{r+2}}{n^{r+1}} \left(\frac{1}{(r+1)(r+2)} - \frac{1}{d^{r+1}(r+1)} \sum_{j=0}^d \omega'_j j^{r+1} \right)$$

et, si $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b])$,

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, $\left| \int_a^b f(t)dt - J_1(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f^{(2)}\|_{\infty, [a, b]}$.
- Si $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, $\left| \int_a^b f(t)dt - J_2(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \|f^{(4)}\|_{\infty, [a, b]}$.

On a en fait la généralisation suivante :

Théorème 22

$$\int_a^b K_r(t)dt = \frac{(b-a)^{r+2}}{n^{r+1}} \left(\frac{1}{(r+1)(r+2)} - \frac{1}{d^{r+1}(r+1)} \sum_{j=0}^d \omega'_j j^{r+1} \right)$$

et, si $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b])$,

$$\left| \int_a^b f(t)dt - J_d(f) \right| \leq \frac{\|f^{(r+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{r!} \left| \int_a^b K_r(t)dt \right|.$$