Chapitre 4 : Intégration numérique

I. Introduction

I. Introduction

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$

I. Introduction

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable.

I. Introduction

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable.

<u>But :</u>

I. Introduction

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable.

But : Approcher $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par une expression *facilement calculable*.

II. Formules de quadrature

II. Formules de quadrature

On note $\mathcal{RI}([a,b])$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$.

On note $\mathcal{RI}([a,b])$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$.

Définition 1

Une formule de quadrature sur $[a,b]$ est une forme linéaire

$$J : \mathcal{RI}([a,b]) \to \mathbb{R}.$$

II. Formules de quadrature

On note $\mathcal{RI}([a,b])$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$.

Définition 1

Une formule de quadrature sur $[a,b]$ est une forme linéaire

$$J : \mathcal{RI}([a,b]) \to \mathbb{R}.$$

Exemple :

II. Formules de quadrature

On note $\mathcal{RI}([a,b])$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$.

Définition 1

Une formule de quadrature sur $[a,b]$ est une forme linéaire

$$J : \mathcal{RI}([a,b]) \to \mathbb{R}.$$

Exemple : Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$.

II. Formules de quadrature

On note $\mathcal{RI}([a,b])$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$.

Définition 1

Une formule de quadrature sur $[a,b]$ est une forme linéaire

$$J : \mathcal{RI}([a,b]) \to \mathbb{R}.$$

Exemple : Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{RI}([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i) \end{array}$$

est une formule de quadrature sur $[a,b]$.

II. Formules de quadrature

Soient $c_0, \ldots, c_n \in [a, b]$ des centres deux à deux distincts,

II. Formules de quadrature

Soient $c_0, \ldots, c_n \in [a, b]$ des centres deux à deux distincts, et $\{L_0, \ldots, L_n\}$ la base de Lagrange associée.

II. Formules de quadrature

Soient $c_0, \dots, c_n \in [a, b]$ des centres deux à deux distincts, et $\{L_0, \dots, L_n\}$ la base de Lagrange associée.

Définition 2

La formule de quadrature

$$J^L_{c_0,\dots,c_n} : \begin{array}{ccc} \mathcal{RI}([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b L_i(t)\mathrm{d}t \right) g(c_i) \end{array}$$

II. Formules de quadrature

Soient $c_0, \ldots, c_n \in [a, b]$ des centres deux à deux distincts, et $\{L_0, \ldots, L_n\}$ la base de Lagrange associée.

Définition 2

La formule de quadrature

$$J^L_{c_0,\ldots,c_n} : \begin{array}{ccc} \mathcal{RI}([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b L_i(t)\mathrm{d}t \right) g(c_i) \end{array}$$

est appelée formule de quadrature de Lagrange associée aux centres $c_0, \ldots, c_n$.

II. Formules de quadrature

Soient $c_0, \ldots, c_n \in [a, b]$ des centres deux à deux distincts, et $\{L_0, \ldots, L_n\}$ la base de Lagrange associée.

Définition 2

La formule de quadrature

$$J^L_{c_0,\ldots,c_n} : \begin{array}{ccc} \mathcal{RI}([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b L_i(t)\mathrm{d}t \right) g(c_i) \end{array}$$

est appelée <u>formule de quadrature de Lagrange associée aux centres $c_0, \ldots, c_n$</u>.

Proposition 3

On a

$$J^L_{c_0,\ldots,c_n}(f) = \int_a^b P_{f,c_0,\ldots,c_n}(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 3

On a

$$J^L_{c_0,\ldots,c_n}(f) = \int_a^b P_{f,c_0,\ldots,c_n}(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 3

On a

$$J^L_{c_0,\dots,c_n}(f) = \int_a^b P_{f,c_0,\dots,c_n}(t)\mathrm{d}t$$

<u>Conséquence :</u> Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$,

Proposition 3

On a
$$J^L_{c_0,\dots,c_n}(f) = \int_a^b P_{f,c_0,\dots,c_n}(t)\mathrm{d}t$$

Conséquence : Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, on a

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J^L_{c_0,\dots,c_n}(f)\right| \quad \leq \quad (b-a)\frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a,b]}}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)\right|$$

Proposition 3

On a

$$J^L_{c_0,\ldots,c_n}(f) = \int_a^b P_{f,c_0,\ldots,c_n}(t)\mathrm{d}t$$

Conséquence : Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J^L_{c_0,\ldots,c_n}(f)\right| &\leq (b-a)\frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a,b]}}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a,b]}.
\end{aligned}$$

Proposition 3

On a

$$J^L_{c_0,\dots,c_n}(f) = \int_a^b P_{f,c_0,\dots,c_n}(t)\mathrm{d}t$$

Conséquence : Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, on a

$$\begin{array}{rcl}\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J^L_{c_0,\dots,c_n}(f)\right| & \leq & (b-a)\dfrac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a,b]}}{(n+1)!}\displaystyle\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)\right| \\ & \leq & \dfrac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a,b]}.\end{array}$$

Mais :

Proposition 3

On a

$$J^L_{c_0,\dots,c_n}(f) = \int_a^b P_{f,c_0,\dots,c_n}(t)\mathrm{d}t$$

<u>Conséquence :</u> Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J^L_{c_0,\dots,c_n}(f)\right| &\leq (b-a)\frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a,b]}}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)\right| \\ &\leq \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a,b]}.\end{aligned}$$

<u>Mais :</u> cela n'assure pas la convergence vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$!

Lemme 4

Si les centres $c_0, \ldots, c_n$ sont équirépartis sur $[a, b]$,

Lemme 4

Si les centres $c_0, \dots, c_n$ sont équirépartis sur $[a, b]$, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$\int_a^b L_{n-i}(t)\mathrm{d}t = \int_a^b L_i(t)\mathrm{d}t,$$

Lemme 4

Si les centres $c_0, \ldots, c_n$ sont équirépartis sur $[a, b]$, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\int_a^b L_{n-i}(t)\mathrm{d}t = \int_a^b L_i(t)\mathrm{d}t,$$

$$\text{et} \quad \int_a^b L_i(t)\mathrm{d}t = \frac{b-a}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} (u-j)\mathrm{d}u.$$

II. Formules de quadrature

Soit J une formule de quadrature sur $[a, b]$.

II. Formules de quadrature

Soit J une formule de quadrature sur $[a, b]$.

Définition 5

On appelle <u>ordre d'exactitude de J</u> le plus grand entier $r \in \mathbb{N}$ tel que

Soit J une formule de quadrature sur $[a, b]$.

Définition 5

On appelle ordre d'exactitude de J le plus grand entier $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_r[X],\ J(P) = \int_a^b P(t)\mathrm{d}t.$$

II. Formules de quadrature

Soit J une formule de quadrature sur $[a, b]$.

Définition 5

On appelle <u>ordre d'exactitude de J</u> le plus grand entier $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_r[X],\ J(P) = \int_a^b P(t)\mathrm{d}t.$$

<u>Exemple :</u> $J^L_{c_0,\dots,c_n}$ est d'ordre d'exactitude au moins n.

III. Méthodes composées

III. Méthodes composées

On considère une *subdivision* $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$:

III. Méthodes composées

On considère une *subdivision* $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$:

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

III. Méthodes composées

On considère une *subdivision* $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$:

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

On appelle pas de la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ le réel

$$\max_{i \in \{0, \ldots, n-1\}} x_{i+1} - x_i.$$

III. Méthodes composées

On considère une *subdivision* $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$:

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

On appelle pas de la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ le réel

$$\max_{i \in \{0,\ldots,n-1\}} x_{i+1} - x_i.$$

Pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, soit J_i une formule de quadrature sur $[x_i, x_{i+1}]$.

III. Méthodes composées

On considère une *subdivision* $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$:

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

On appelle pas de la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ le réel

$$\max_{i \in \{0,\ldots,n-1\}} x_{i+1} - x_i.$$

Pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, soit J_i une formule de quadrature sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Proposition et Définition 6

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{RI}([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} J_i\left(g_{|[x_i,x_{i+1}]}\right) \end{array}$$

III. Méthodes composées

On considère une *subdivision* $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$:

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

On appelle pas de la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ le réel

$$\max_{i \in \{0,\ldots,n-1\}} x_{i+1} - x_i.$$

Pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, soit J_i une formule de quadrature sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Proposition et Définition 6

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{RI}([a, b]) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} J_i \left(g_{|[x_i, x_{i+1}]} \right) \end{array}$$

est une formule de quadrature sur $[a, b]$, appelée formule de quadrature composée à partir de $J_0, \ldots, J_{n-1}$.

Exemple :

III. Méthodes composées

Exemple : Pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, soit $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$

Exemple : Pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, soit $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et considérons l'application

$$J_i : \begin{array}{ccc} \mathcal{RI}([x_i, x_{i+1}]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(c_i)\mathrm{d}t = f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \end{array}$$

III. Méthodes composées

Exemple : Pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, soit $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et considérons l'application

$$J_i : \begin{array}{ccc} \mathcal{RI}([x_i, x_{i+1}]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(c_i)\mathrm{d}t = f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \end{array}$$

La formule de quadrature composée à partir de $J_0, \ldots, J_{n-1}$ est

III. Méthodes composées

Exemple : Pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, soit $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et considérons l'application

$$J_i : \begin{array}{ccc} \mathcal{RI}([x_i, x_{i+1}]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(c_i)\mathrm{d}t = f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \end{array}$$

La formule de quadrature composée à partir de $J_0, \ldots, J_{n-1}$ est

$$J_{c_0,\ldots,c_{n-1}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{RI}([a, b]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(c_i)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \end{array}$$

III. Méthodes composées

$$J_{c_0,\ldots,c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $c_i := x_i$,

III. Méthodes composées

$$J_{c_0,\dots,c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0,\dots,x_{n-1}}$ est appelée

  méthode des rectangles à gauche :

III. Méthodes composées

$$J_{c_0,\ldots,c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0,\ldots,x_{n-1}}$ est appelée méthode des rectangles à gauche : $R_g(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.

III. Méthodes composées

$$J_{c_0,\dots,c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0,\dots,x_{n-1}}$ est appelée méthode des rectangles à gauche : $R_g(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_{i+1}$,

$$J_{c_0,\ldots,c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0,\ldots,x_{n-1}}$ est appelée <u>méthode des rectangles à gauche</u> : $R_g(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $c_i := x_{i+1}$, $R_d := J_{x_1,\ldots,x_n}$ est appelée <u>méthode des rectangles à droite</u> :

III. Méthodes composées

$$J_{c_0,\dots,c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0,\dots,n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0,\dots,x_{n-1}}$ est appelée méthode des rectangles à gauche : $R_g(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0,\dots,n-1\}$, $c_i := x_{i+1}$, $R_d := J_{x_1,\dots,x_n}$ est appelée méthode des rectangles à droite : $R_d(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$.

III. Méthodes composées

$$J_{c_0,\dots,c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0,\dots,x_{n-1}}$ est appelée <u>méthode des rectangles à gauche</u> : $R_g(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_{i+1}$, $R_d := J_{x_1,\dots,x_n}$ est appelée <u>méthode des rectangles à droite</u> : $R_d(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$,

III. Méthodes composées

$$J_{c_0,\dots,c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0,\dots,x_{n-1}}$ est appelée <u>méthode des rectangles à gauche</u> : $R_g(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_{i+1}$, $R_d := J_{x_1,\dots,x_n}$ est appelée <u>méthode des rectangles à droite</u> : $R_d(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $R_m := J_{c_0,\dots,c_{n-1}}$ est appelée <u>méthode des points milieux</u> :

III. Méthodes composées

$$J_{c_0,\ldots,c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0,\ldots,x_{n-1}}$ est appelée <u>méthode des rectangles à gauche</u> : $R_g(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $c_i := x_{i+1}$, $R_d := J_{x_1,\ldots,x_n}$ est appelée <u>méthode des rectangles à droite</u> : $R_d(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $c_i := \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $R_m := J_{c_0,\ldots,c_{n-1}}$ est appelée <u>méthode des points milieux</u> :
$$R_m(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i).$$

III. Méthodes composées

$$J_{c_0,\dots,c_{n-1}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Définition 7

- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_i$, $R_g := J_{x_0,\dots,x_{n-1}}$ est appelée méthode des rectangles à gauche : $R_g(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := x_{i+1}$, $R_d := J_{x_1,\dots,x_n}$ est appelée méthode des rectangles à droite : $R_d(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$.
- Si $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $c_i := \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $R_m := J_{c_0,\dots,c_{n-1}}$ est appelée méthode des points milieux :
  $$R_m(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i).$$

Remarque : R_g et R_d sont d'ordre d'exactitude 0.

On suppose que la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ est régulière

On suppose que la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ est régulière i.e.
$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ est régulière i.e. $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$: le pas de $(x_0, \dots, x_n)$ est $h_n := \frac{b-a}{n}$.

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ est régulière i.e. $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$: le pas de $(x_0, \ldots, x_n)$ est $h_n := \frac{b-a}{n}$.

Proposition 8

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$,

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ est régulière i.e. $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$: le pas de $(x_0, \ldots, x_n)$ est $h_n := \frac{b-a}{n}$.

Proposition 8

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, on a

$$\left| J_{c_0, \ldots, c_{n-1}}(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq (b-a) h_n \left\| f' \right\|_{\infty, [a,b]} .$$

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ est régulière i.e. $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$: le pas de $(x_0, \ldots, x_n)$ est $h_n := \frac{b-a}{n}$.

Proposition 8

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, on a

$$\left| J_{c_0,\ldots,c_{n-1}}(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq (b-a) h_n \left\| f' \right\|_{\infty,[a,b]} .$$

Remarque :

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ est régulière i.e. $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$: le pas de $(x_0, \ldots, x_n)$ est $h_n := \frac{b-a}{n}$.

Proposition 8

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, on a

$$\left| J_{c_0, \ldots, c_{n-1}}(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq (b-a) h_n \left\| f' \right\|_{\infty, [a,b]}.$$

Remarque : $J_{c_0^n, \ldots, c_{n-1}^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ est régulière i.e. $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$: le pas de $(x_0, \dots, x_n)$ est $h_n := \frac{b-a}{n}$.

Proposition 8

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, on a

$$\left| J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq (b-a) h_n \left\| f' \right\|_{\infty, [a,b]} .$$

Remarque : $J_{c_0^n, \dots, c_{n-1}^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t) \mathrm{d}t$

Proposition 9

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et $J = R_g$ ou R_d, on a

III. Méthodes composées

On suppose que la subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ est régulière i.e. $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $x_{i+1} = x_i + \frac{b-a}{n}$: le pas de $(x_0, \dots, x_n)$ est $h_n := \frac{b-a}{n}$.

Proposition 8

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, on a

$$\left| J_{c_0, \dots, c_{n-1}}(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq (b-a) h_n \|f'\|_{\infty, [a,b]} .$$

Remarque : $J_{c_0^n, \dots, c_{n-1}^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

Proposition 9

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et $J = R_g$ ou R_d, on a

$$\left| J(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{b-a}{2} h_n \|f'\|_{\infty, [a,b]} .$$

Proposition 10

Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$,

Proposition 10

Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, on a

$$\left| R_m(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \frac{b-a}{24} h_n^2 \left\| f'' \right\|_{\infty,[a,b]} .$$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$, on note

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Pour tout $j \in \{0, \ldots, d\}$, on note

$$c_{i,j} := x_i + j\frac{x_{i+1} - x_i}{d}$$

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Pour tout $j \in \{0, \ldots, d\}$, on note

$$c_{i,j} := x_i + j\frac{x_{i+1} - x_i}{d} = x_i + j\frac{h_n}{d},$$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Pour tout $j \in \{0, \ldots, d\}$, on note

$$c_{i,j} := x_i + j \frac{x_{i+1} - x_i}{d} = x_i + j \frac{h_n}{d},$$

puis

$$J_{d,i} := J^L_{c_{i,0}, \ldots, c_{i,d}}.$$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Pour tout $j \in \{0, \ldots, d\}$, on note

$$c_{i,j} := x_i + j\frac{x_{i+1} - x_i}{d} = x_i + j\frac{h_n}{d},$$

puis

$$J_{d,i} := J^L_{c_{i,0},\ldots,c_{i,d}}.$$

Définition 11

La formule de quadrature J_d sur $[a, b]$ composée à partir de $J_{d,0}, \ldots, J_{d,n-1}$ est appelée <u>méthode de Newton-Cotes d'ordre d</u>.

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$, on note

$$c_{i,j} := x_i + j\frac{x_{i+1} - x_i}{d} = x_i + j\frac{h_n}{d},$$

puis

$$J_{d,i} := J^L_{c_{i,0},\dots,c_{i,d}}.$$

Définition 11

La formule de quadrature J_d sur $[a, b]$ composée à partir de $J_{d,0}, \dots, J_{d,n-1}$ est appelée <u>méthode de Newton-Cotes d'ordre d</u>.

On a

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}\left(f_{|[x_i,x_{i+1}]}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{d}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t\right) f(c_{i,j})$$

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Pour tout $j \in \{0, \ldots, d\}$, on note

$$c_{i,j} := x_i + j\frac{x_{i+1} - x_i}{d} = x_i + j\frac{h_n}{d},$$

puis

$$J_{d,i} := J^L_{c_{i,0},\ldots,c_{i,d}}.$$

Définition 11

La formule de quadrature J_d sur $[a, b]$ composée à partir de $J_{d,0}, \ldots, J_{d,n-1}$ est appelée méthode de Newton-Cotes d'ordre d.

On a

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}\left(f_{|[x_i,x_{i+1}]}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{d}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t\right) f(c_{i,j})$$

où, pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\{L_{i,0}, \ldots, L_{i,d}\}$ la base de Lagrange associée aux centres $c_{i,0}, \ldots, c_{i,d}$.

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}\left(f_{|[x_i,x_{i+1}]}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{d} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t\right) f(c_{i,j})$$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}\left(f_{|[x_i,x_{i+1}]}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{d}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t\right) f(c_{i,j})$$

Si $i \in \{0,\dots,n-1\}$ et $j \in \{0,\dots,d\}$, on note $\omega_{i,j} := \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t$.

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}\left(f_{|[x_i,x_{i+1}]}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{d} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t \right) f(c_{i,j})$$

Si $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et $j \in \{0, \dots, d\}$, on note $\omega_{i,j} := \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t$.

Alors :

Lemme 12

$$\omega_{i,j} = \frac{h_n}{d} \frac{(-1)^{d-j}}{j!(d-j)!} \int_0^d \prod_{k=0,\ k\neq j}^{d} (u-k)\mathrm{d}u$$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}\left(f_{|[x_i,x_{i+1}]}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{d}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t\right) f(c_{i,j})$$

Si $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $j \in \{0, \ldots, d\}$, on note $\omega_{i,j} := \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t$.

Alors :

Lemme 12

$$\omega_{i,j} = \frac{h_n}{d}\frac{(-1)^{d-j}}{j!(d-j)!}\int_0^d \prod_{k=0,\ k\neq j}^{d}(u-k)\mathrm{d}u$$

et $\omega_j := \omega_{i,j}$ est donc indépendant de i.

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}\left(f_{|[x_i,x_{i+1}]}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{d}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t\right) f(c_{i,j})$$

Si $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ et $j \in \{0,\ldots,d\}$, on note $\omega_{i,j} := \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t$.

Alors :

Lemme 12

$$\omega_{i,j} = \frac{h_n}{d}\frac{(-1)^{d-j}}{j!(d-j)!}\int_0^d \prod_{k=0,\ k\neq j}^{d}(u-k)\mathrm{d}u$$

et $\omega_j := \omega_{i,j}$ est donc indépendant de i.

Si on note $\omega'_j := \frac{\omega_j}{h_n}$,

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}\left(f_{|[x_i,x_{i+1}]}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{d}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t\right) f(c_{i,j})$$

Si $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ et $j \in \{0,\ldots,d\}$, on note $\omega_{i,j} := \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t$.

Alors :

Lemme 12

$$\omega_{i,j} = \frac{h_n}{d}\frac{(-1)^{d-j}}{j!(d-j)!}\int_0^d \prod_{k=0,\ k\neq j}^{d}(u-k)\mathrm{d}u$$

et $\omega_j := \omega_{i,j}$ est donc indépendant de i.

Si on note $\omega'_j := \frac{\omega_j}{h_n}$, ω'_j est indépendant de n.

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}\left(f_{|[x_i,x_{i+1}]}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{d}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t\right) f(c_{i,j})$$

Si $i \in \{0,\dots,n-1\}$ et $j \in \{0,\dots,d\}$, on note $\omega_{i,j} := \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t$.

Alors :

Lemme 12

$$\omega_{i,j} = \frac{h_n}{d}\frac{(-1)^{d-j}}{j!(d-j)!}\int_0^d \prod_{k=0,\ k\neq j}^{d} (u-k)\mathrm{d}u$$

et $\omega_j := \omega_{i,j}$ est donc indépendant de i.

Si on note $\omega'_j := \frac{\omega_j}{h_n}$, ω'_j est indépendant de n.

Les nombres $\omega_0,\dots,\omega_d$ sont appelés les poids de la méthode J_d.

$$J_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} J_{d,i}\left(f_{|[x_i,x_{i+1}]}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{d}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t\right) f(c_{i,j})$$

Si $i \in \{0,\dots,n-1\}$ et $j \in \{0,\dots,d\}$, on note $\omega_{i,j} := \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\mathrm{d}t$.

Alors :

Lemme 12

$$\omega_{i,j} = \frac{h_n}{d}\frac{(-1)^{d-j}}{j!(d-j)!}\int_0^d \prod_{k=0,\ k\neq j}^{d}(u-k)\mathrm{d}u$$

et $\omega_j := \omega_{i,j}$ est donc indépendant de i.

Si on note $\omega'_j := \frac{\omega_j}{h_n}$, ω'_j est indépendant de n.

Les nombres $\omega_0,\dots,\omega_d$ sont appelés les <u>poids</u> de la méthode J_d.

<u>Remarque :</u> $\forall j \in \{0,\dots,d\}$, $\omega_{d-j} = \omega_j$.

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$,

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$,

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_d(f) \right| \leq h_n^{d+1} \frac{b-a}{(d+1)!} \left\| f^{(d+1)} \right\|_{\infty,[a,b]} .$$

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a,b])$,

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_d(f) \right| \leq h_n^{d+1} \frac{b-a}{(d+1)!} \left\| f^{(d+1)} \right\|_{\infty,[a,b]}.$$

<u>Conséquence :</u> $J_d^n(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a,b])$,

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_d(f) \right| \leq h_n^{d+1} \frac{b-a}{(d+1)!} \left\| f^{(d+1)} \right\|_{\infty,[a,b]}.$$

Conséquence : $J_d^n(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

Proposition 14

J_d est d'ordre d'exactitude au moins d.

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$,

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_d(f) \right| \leq h_n^{d+1} \frac{b-a}{(d+1)!} \left\| f^{(d+1)} \right\|_{\infty,[a,b]}.$$

Conséquence : $J_d^n(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

Proposition 14

J_d est d'ordre d'exactitude au moins d.

Remarque :

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a,b])$,

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_d(f) \right| \le h_n^{d+1} \frac{b-a}{(d+1)!} \left\| f^{(d+1)} \right\|_{\infty,[a,b]}.$$

Conséquence : $J_d^n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Proposition 14

J_d est d'ordre d'exactitude au moins d.

Remarque : Il est possible de montrer que

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$,

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_d(f) \right| \leq h_n^{d+1} \frac{b-a}{(d+1)!} \left\| f^{(d+1)} \right\|_{\infty,[a,b]}.$$

Conséquence : $J_d^n(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

Proposition 14

J_d est d'ordre d'exactitude au moins d.

Remarque : Il est possible de montrer que

- si d est impair, J_d est d'ordre d'exactitude d,

IV. Méthodes composées de Newton-Cotes

Proposition 13

Si $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a,b])$,

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_d(f) \right| \leq h_n^{d+1} \frac{b-a}{(d+1)!} \left\| f^{(d+1)} \right\|_{\infty,[a,b]}.$$

Conséquence : $J_d^n(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

Proposition 14

J_d est d'ordre d'exactitude au moins d.

Remarque : Il est possible de montrer que

- si d est impair, J_d est d'ordre d'exactitude d,
- si d est pair, J_d est d'ordre d'exactitude $d+1$.

V. La méthode des trapèzes

Définition 15

La méthode J_1 est appelée méthode des trapèzes.

V. La méthode des trapèzes

Définition 15

La méthode J_1 est appelée méthode des trapèzes.

On a

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1})\big) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(\omega_0 f(x_i) + \omega_1 f(x_{i+1})\big).$$

Définition 15

La méthode J_1 est appelée méthode des trapèzes.

On a

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1})\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\omega_0 f(x_i) + \omega_1 f(x_{i+1})\right).$$

Proposition 16

$\omega_0 = \omega_1 = \frac{h_n}{2}$.

V. La méthode des trapèzes

Définition 15

La méthode J_1 est appelée méthode des trapèzes.

On a

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1})\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\omega_0 f(x_i) + \omega_1 f(x_{i+1})\right).$$

Proposition 16

$\omega_0 = \omega_1 = \frac{h_n}{2}$.

On a donc

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} (x_{i+1} - x_i)$$

V. La méthode des trapèzes

Définition 15

La méthode J_1 est appelée méthode des trapèzes.

On a

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1})\big) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(\omega_0 f(x_i) + \omega_1 f(x_{i+1})\big).$$

Proposition 16

$\omega_0 = \omega_1 = \frac{h_n}{2}$.

On a donc

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{2}\big(R_d(f) + R_g(f)\big).$$

V. La méthode des trapèzes

Définition 15

La méthode J_1 est appelée méthode des trapèzes.

On a

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1})\big) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(\omega_0 f(x_i) + \omega_1 f(x_{i+1})\big).$$

Proposition 16

$\omega_0 = \omega_1 = \frac{h_n}{2}$.

On a donc

$$J_1(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{2}\big(R_d(f) + R_g(f)\big).$$

Remarque : L'ordre d'exactitude de J_1 est 1.

VI. La méthode de Simpson

Définition 17

La méthode J_2 est appelée <u>méthode de Simpson</u>.

VI. La méthode de Simpson

Définition 17

La méthode J_2 est appelée <u>méthode de Simpson</u>.

On a

$$J_2(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1}) + \omega_d f(c_{i,2})\big).$$

Définition 17

La méthode J_2 est appelée <u>méthode de Simpson</u>.

On a

$$J_2(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1}) + \omega_d f(c_{i,2}) \right).$$

Proposition 18

$\omega_0 = \omega_2 = \frac{h_n}{6}$ et $\omega_1 = \frac{2}{3} h_n$.

VI. La méthode de Simpson

Définition 17

La méthode J_2 est appelée méthode de Simpson.

On a

$$J_2(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1}) + \omega_d f(c_{i,2})\right).$$

Proposition 18

$\omega_0 = \omega_2 = \frac{h_n}{6}$ et $\omega_1 = \frac{2}{3} h_n$.

On a donc

$$J_2(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6} f(x_i) + \frac{2}{3} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \frac{1}{6} f(x_{i+1}) \right) (x_{i+1} - x_i).$$

Définition 17

La méthode J_2 est appelée méthode de Simpson.

On a

$$J_2(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(\omega_0 f(c_{i,0}) + \omega_1 f(c_{i,1}) + \omega_d f(c_{i,2})\big).$$

Proposition 18

$\omega_0 = \omega_2 = \frac{h_n}{6}$ et $\omega_1 = \frac{2}{3} h_n$.

On a donc

$$J_2(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6} f(x_i) + \frac{2}{3} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \frac{1}{6} f(x_{i+1})\right)(x_{i+1} - x_i).$$

Remarque : L'ordre d'exactitude de J_2 est 3.

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Soit J la formule de quadrature sur $[a, b]$ donnée par

$$J(f) = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i f(y_i),$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Soit J la formule de quadrature sur $[a, b]$ donnée par

$$J(f) = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i f(y_i),$$

où $\lambda_0, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ et $y_0, \ldots, y_N \in [a, b]$.

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Soit J la formule de quadrature sur $[a, b]$ donnée par

$$J(f) = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i f(y_i),$$

où $\lambda_0, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ et $y_0, \ldots, y_N \in [a, b]$. On note

$$E(f) := \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J(f).$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Soit J la formule de quadrature sur $[a, b]$ donnée par

$$J(f) = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i f(y_i),$$

où $\lambda_0, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ et $y_0, \ldots, y_N \in [a, b]$. On note

$$E(f) := \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J(f).$$

On a le résultat suivant :

Théorème 19

Soit $r \in \mathbb{N}$.

Théorème 19

Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b])$

Théorème 19

Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a,b])$ et que J est d'ordre d'exactitude au moins r.

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Théorème 19

Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a,b])$ et que J est d'ordre d'exactitude au moins r. Alors

$$E(f) = \frac{1}{r!} \int_a^b K_r(t) f^{(r+1)}(t) \mathrm{d}t,$$

Théorème 19

Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b])$ et que J est d'ordre d'exactitude au moins r. Alors

$$E(f) = \frac{1}{r!} \int_a^b K_r(t) f^{(r+1)}(t) \mathrm{d}t,$$

où

$$K_r : \begin{array}{ccc} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & E(\psi_{r,t}) \end{array}$$

Théorème 19

Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b])$ et que J est d'ordre d'exactitude au moins r. Alors

$$E(f) = \frac{1}{r!} \int_a^b K_r(t) f^{(r+1)}(t) \mathrm{d}t,$$

où

$$K_r : \begin{array}{ccc} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & E(\psi_{r,t}) \end{array}$$

où, si $t \in [a, b]$,

Théorème 19

Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a,b])$ et que J est d'ordre d'exactitude au moins r. Alors

$$E(f) = \frac{1}{r!}\int_a^b K_r(t) f^{(r+1)}(t)\mathrm{d}t,$$

où

$$K_r : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & E(\psi_{r,t}) \end{array}$$

où, si $t \in [a,b]$,

$$\psi_{r,t} : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} (x-t)^r & \text{si } x-t \geq 0 \text{ i.e. si } t \leq x, \\ 0 & \text{sinon i.e. si } t > x. \end{cases} \end{array}$$

Corollaire 20

Corollaire 20

Avec les mêmes hypothèses,

Corollaire 20

Avec les mêmes hypothèses,

$$|E(f)| \leq \frac{\left\| f^{(r+1)} \right\|_{\infty,[a,b]}}{r!} \int_a^b |K_r(t)| \,\mathrm{d}t.$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d.

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d. On a :

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d. On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t)\mathrm{d}t = n\int_0^{h_n}\left(\int_0^{h_n}\psi_{r,u}(y)\mathrm{d}y - \sum_{j=0}^{d}\omega_j\psi_{r,u}\left(j\frac{h_n}{d}\right)\right)\mathrm{d}u$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d. On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t)\mathrm{d}t = n\int_0^{h_n}\left(\int_0^{h_n}\psi_{r,u}(y)\mathrm{d}y - \sum_{j=0}^{d}\omega_j\psi_{r,u}\left(j\frac{h_n}{d}\right)\right)\mathrm{d}u$$

Exemples :

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d. On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t)\mathrm{d}t = n\int_0^{h_n}\left(\int_0^{h_n}\psi_{r,u}(y)\mathrm{d}y - \sum_{j=0}^{d}\omega_j\psi_{r,u}\left(j\frac{h_n}{d}\right)\right)\mathrm{d}u$$

Exemples :

- Si $d = 1$,

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d. On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t)\mathrm{d}t = n\int_0^{h_n}\left(\int_0^{h_n}\psi_{r,u}(y)\mathrm{d}y - \sum_{j=0}^{d}\omega_j\psi_{r,u}\left(j\frac{h_n}{d}\right)\right)\mathrm{d}u$$

Exemples :

- Si $d = 1$, $\displaystyle\int_a^b K_1(t)\mathrm{d}t = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d. On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t)\mathrm{d}t = n \int_0^{h_n} \left(\int_0^{h_n} \psi_{r,u}(y)\mathrm{d}y - \sum_{j=0}^{d} \omega_j \psi_{r,u}\left(j\frac{h_n}{d} \right) \right) \mathrm{d}u$$

Exemples :

- Si $d = 1$, $\displaystyle\int_a^b K_1(t)\mathrm{d}t = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.
- Si $d = 2$,

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d. On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t)\mathrm{d}t = n\int_0^{h_n}\left(\int_0^{h_n}\psi_{r,u}(y)\mathrm{d}y - \sum_{j=0}^{d}\omega_j\psi_{r,u}\left(j\frac{h_n}{d}\right)\right)\mathrm{d}u$$

Exemples :

- Si $d = 1$, $\displaystyle\int_a^b K_1(t)\mathrm{d}t = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.
- Si $d = 2$, $\displaystyle\int_a^b K_3(t)\mathrm{d}t = -\frac{(b-a)^5}{480n^4}$.

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d. On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t)\mathrm{d}t = n \int_0^{h_n} \left(\int_0^{h_n} \psi_{r,u}(y)\mathrm{d}y - \sum_{j=0}^{d} \omega_j \psi_{r,u}\left(j\frac{h_n}{d} \right) \right) \mathrm{d}u$$

Exemples :

- Si $d = 1$, $\displaystyle\int_a^b K_1(t)\mathrm{d}t = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.
- Si $d = 2$, $\displaystyle\int_a^b K_3(t)\mathrm{d}t = -\frac{(b-a)^5}{480n^4}$.

Remarque

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d. On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t)\mathrm{d}t = n \int_0^{h_n} \left(\int_0^{h_n} \psi_{r,u}(y)\mathrm{d}y - \sum_{j=0}^{d} \omega_j \psi_{r,u}\left(j\frac{h_n}{d} \right) \right) \mathrm{d}u$$

Exemples :

- Si $d = 1$, $\displaystyle\int_a^b K_1(t)\mathrm{d}t = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.
- Si $d = 2$, $\displaystyle\int_a^b K_3(t)\mathrm{d}t = -\frac{(b-a)^5}{480n^4}$.

Remarque

Il est possible de montrer que K_r est de signe constant,

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

On suppose que $J = J_d$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et on note r l'ordre d'exactitude de J_d. On a :

Lemme 21

$$\int_a^b K_r(t)\mathrm{d}t = n \int_0^{h_n} \left(\int_0^{h_n} \psi_{r,u}(y)\mathrm{d}y - \sum_{j=0}^{d} \omega_j \psi_{r,u}\left(j\frac{h_n}{d}\right)\right) \mathrm{d}u$$

<u>Exemples :</u>

- Si $d = 1$, $\displaystyle\int_a^b K_1(t)\mathrm{d}t = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.
- Si $d = 2$, $\displaystyle\int_a^b K_3(t)\mathrm{d}t = -\frac{(b-a)^5}{480n^4}$.

Remarque

Il est possible de montrer que K_r est de signe constant, et donc

$$\int_a^b |K_r(t)|\,\mathrm{d}t = \left|\int_a^b K_r(t)\mathrm{d}t\right|.$$

Conséquences :

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$,

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, $\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_1(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \left\| f^{(2)} \right\|_{\infty,[a,b]}$.

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, $$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_1(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \left\| f^{(2)} \right\|_{\infty,[a,b]}.$$
- Si $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$,

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, $\displaystyle \left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_1(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \left\| f^{(2)} \right\|_{\infty,[a,b]}$.
- Si $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, $\displaystyle \left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_2(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty,[a,b]}$.

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, $\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_1(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \left\| f^{(2)} \right\|_{\infty,[a,b]}$.
- Si $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, $\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_2(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty,[a,b]}$.

On a en fait la généralisation suivante :

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, $\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_1(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \left\| f^{(2)} \right\|_{\infty,[a,b]}$.
- Si $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, $\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_2(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty,[a,b]}$.

On a en fait la généralisation suivante :

Théorème 22

$$\int_a^b K_r(t)\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^{r+2}}{n^{r+1}} \left(\frac{1}{(r+1)(r+2)} - \frac{1}{d^{r+1}(r+1)} \sum_{j=0}^{d} \omega'_j j^{r+1} \right)$$

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, $\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_1(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \left\| f^{(2)} \right\|_{\infty,[a,b]}$.
- Si $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, $\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_2(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty,[a,b]}$.

On a en fait la généralisation suivante :

Théorème 22

$$\int_a^b K_r(t)\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^{r+2}}{n^{r+1}} \left(\frac{1}{(r+1)(r+2)} - \frac{1}{d^{r+1}(r+1)} \sum_{j=0}^{d} \omega_j' j^{r+1} \right)$$

et, si $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a,b])$,

VII. Estimation de l'erreur et noyau de Peano

Conséquences :

- Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, $\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_1(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \left\| f^{(2)} \right\|_{\infty,[a,b]}$.
- Si $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, $\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_2(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty,[a,b]}$.

On a en fait la généralisation suivante :

Théorème 22

$$\int_a^b K_r(t)\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^{r+2}}{n^{r+1}} \left(\frac{1}{(r+1)(r+2)} - \frac{1}{d^{r+1}(r+1)} \sum_{j=0}^{d} \omega_j' j^{r+1} \right)$$

et, si $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a,b])$,

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - J_d(f) \right| \leq \frac{\left\| f^{(r+1)} \right\|_{\infty,[a,b]}}{r!} \left| \int_a^b K_r(t)\mathrm{d}t \right|.$$