Chapitre 2 : Interpolation polynomiale

I. Introduction

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction,

I. Introduction

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction, soient $c_0, \ldots, c_n \in I$

I. Introduction

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction, soient $c_0, \dots, c_n \in I$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

I. Introduction

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction, soient $c_0, \ldots, c_n \in I$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Définition 1

On dit que P interpole f aux centres $c_0, \ldots, c_n$ si

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, P(c_i) = f(c_i).$$

I. Introduction

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction, soient $c_0, \ldots, c_n \in I$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Définition 1

On dit que P interpole f aux centres $c_0, \ldots, c_n$ si

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, P(c_i) = f(c_i).$$

But : Approcher "le mieux possible" f par un polynôme interpolateur.

II. Méthode de Horner

Méthode de Horner : Algorithme pour évaluer *efficacement* un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en un réel.

II. Méthode de Horner

Méthode de Horner : Algorithme pour évaluer *efficacement* un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en un réel.

Soient $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

II. Méthode de Horner

Méthode de Horner : Algorithme pour évaluer *efficacement* un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en un réel.

Soient $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

Un algorithme basique d'évaluation de P en x est :

Méthode de Horner : Algorithme pour évaluer *efficacement* un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en un réel.

Soient $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

Un algorithme basique d'évaluation de P en x est :

$r \leftarrow 0$
for $i = 0$ à n **do**
    $r := r + a_i x^i$
end for
Return r

II. Méthode de Horner

<u>Méthode de Horner :</u> Algorithme pour évaluer *efficacement* un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en un réel.

Soient $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

Un algorithme basique d'évaluation de P en x est :

$r \leftarrow 0$
for $i = 0$ à n **do**
  $r := r + a_i x^i$
end for
Return r

La complexité de cette méthode est en $O(n^2)$.

II. Méthode de Horner

On écrit

$$P(x) = a_0 + x\Big(a_1 + x\Big(\cdots + x\Big(a_{n-1} + xa_n\Big)\cdots\Big)\Big).$$

II. Méthode de Horner

On écrit

$$P(x) = a_0 + x\big(a_1 + x\big(\cdots + x\big(a_{n-1} + xa_n\big)\cdots\big)\big).$$

La méthode de Horner est l'algorithme :

II. Méthode de Horner

On écrit

$$P(x) = a_0 + x\big(a_1 + x\big(\cdots + x\big(a_{n-1} + xa_n\big)\cdots\big)\big).$$

La méthode de Horner est l'algorithme :

$r \leftarrow a_n$
for $i = n-1$ à 0 **do**
  $r \leftarrow a_i + xr$
end for

II. Méthode de Horner

On écrit

$$P(x) = a_0 + x\big(a_1 + x\big(\cdots + x\big(a_{n-1} + x a_n\big)\cdots\big)\big).$$

La méthode de Horner est l'algorithme :

$r \leftarrow a_n$
for $i = n-1$ à 0 **do**
    $r \leftarrow a_i + xr$
end for

La complexité de la méthode de Horner est en $O(n)$.

III. Interpolation polynomiale et méthode de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}$,

III. Interpolation polynomiale et méthode de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}$, $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, Soient $n \in \mathbb{N}$, $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, et $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

III. Interpolation polynomiale et méthode de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}$, $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, et $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on pose

Soient $n \in \mathbb{N}$, $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, et $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on pose

$$L_i := \prod_{0 \leq k \leq n,\ k \neq i} \frac{X - c_k}{c_i - c_k} \in \mathbb{R}_n[X].$$

III. Interpolation polynomiale et méthode de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}$, $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, et $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on pose

$$L_i := \prod_{0 \leq k \leq n,\ k \neq i} \frac{X - c_k}{c_i - c_k} \in \mathbb{R}_n[X].$$

On a :

III. Interpolation polynomiale et méthode de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}$, $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, et $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on pose

$$L_i := \prod_{0 \leq k \leq n,\ k \neq i} \frac{X - c_k}{c_i - c_k} \in \mathbb{R}_n[X].$$

On a :

Proposition 2

$\forall i, j \in \{0, \ldots, n\}$, $L_i(c_j) = \delta_{i,j}$.

III. Interpolation polynomiale et méthode de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}$, $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, et $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on pose

$$L_i := \prod_{0 \leq k \leq n,\ k \neq i} \frac{X - c_k}{c_i - c_k} \in \mathbb{R}_n[X].$$

On a :

Proposition 2

$\forall i, j \in \{0, \ldots, n\}$, $L_i(c_j) = \delta_{i,j}$.

Conséquence : $\{L_0, \ldots, L_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

III. Interpolation polynomiale et méthode de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}$, $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, et $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on pose

$$L_i := \prod_{0 \leq k \leq n,\ k \neq i} \frac{X - c_k}{c_i - c_k} \in \mathbb{R}_n[X].$$

On a :

Proposition 2

$\forall i, j \in \{0, \dots, n\}$, $L_i(c_j) = \delta_{i,j}$.

Conséquence : $\{L_0, \dots, L_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, appelée *base de Lagrange associée aux centres* $c_0, \dots, c_n$.

On pose

$$L := \sum_{i=0}^{n} y_i L_i \in \mathbb{R}_n[X].$$

III. Interpolation polynomiale et méthode de Lagrange

On pose

$$L := \sum_{i=0}^{n} y_i L_i \in \mathbb{R}_n[X].$$

On a :

III. Interpolation polynomiale et méthode de Lagrange

On pose

$$L := \sum_{i=0}^{n} y_i L_i \in \mathbb{R}_n[X].$$

On a :

Théorème 3

1. $\forall j \in \{0, \ldots, n\},\ L(c_j) = y_j,$

On pose

$$L := \sum_{i=0}^{n} y_i L_i \in \mathbb{R}_n[X].$$

On a :

Théorème 3

1. $\forall j \in \{0, \ldots, n\},\ L(c_j) = y_j,$
2. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $\forall j \in \{0, \ldots, n\},\ P(c_j) = y_j$, alors $P = L$.

On pose

$$L := \sum_{i=0}^{n} y_i L_i \in \mathbb{R}_n[X].$$

On a :

Théorème 3

1. $\forall j \in \{0, \ldots, n\},\ L(c_j) = y_j,$
2. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $\forall j \in \{0, \ldots, n\},\ P(c_j) = y_j$, alors $P = L$.

Conséquence : Il existe un *unique* polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ interpolateur de f aux centres $c_0, \ldots, c_n$,

On pose

$$L := \sum_{i=0}^{n} y_i L_i \in \mathbb{R}_n[X].$$

On a :

Théorème 3

1. $\forall j \in \{0, \ldots, n\},\ L(c_j) = y_j$,
2. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $\forall j \in \{0, \ldots, n\},\ P(c_j) = y_j$, alors $P = L$.

Conséquence : Il existe un *unique* polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ interpolateur de f aux centres $c_0, \ldots, c_n$, que l'on note $P_{f,c_0,\ldots,c_n}$.

III. Interpolation polynomiale et méthode de Lagrange

On pose

$$L := \sum_{i=0}^{n} y_i L_i \in \mathbb{R}_n[X].$$

On a :

Théorème 3

1. $\forall j \in \{0, \dots, n\}, \ L(c_j) = y_j$,
2. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $\forall j \in \{0, \dots, n\}, \ P(c_j) = y_j$, alors $P = L$.

Conséquence : Il existe un *unique* polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ interpolateur de f aux centres $c_0, \dots, c_n$, que l'on note $P_{f,c_0,\dots,c_n}$.

Définition 4

$P_{f,c_0,\dots,c_n}$ est appelé polynôme d'interpolation de f aux centres c_0, ..., c_n.

III. Interpolation polynomiale et méthode de Lagrange

On pose

$$L := \sum_{i=0}^{n} y_i L_i \in \mathbb{R}_n[X].$$

On a :

Théorème 3

1. $\forall j \in \{0, \ldots, n\}, \ L(c_j) = y_j$,
2. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $\forall j \in \{0, \ldots, n\}, \ P(c_j) = y_j$, alors $P = L$.

Conséquence : Il existe un *unique* polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ interpolateur de f aux centres $c_0, \ldots, c_n$, que l'on note $P_{f,c_0,\ldots,c_n}$.

Définition 4

$P_{f,c_0,\ldots,c_n}$ est appelé polynôme d'interpolation de f aux centres $c_0, \ldots, c_n$.

Remarque : On a $P_{f,c_0,\ldots,c_n} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(c_i) L_i$.

IV. Méthode de Newton

IV. Méthode de Newton

On note $H_0 := 1$

IV. Méthode de Newton

On note $H_0 := 1$ et, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, On note $H_0 := 1$ et, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$H_i := \prod_{j=0}^{i-1} (X - c_j) = (X - c_0) \cdots (X - c_{i-1}).$$

IV. Méthode de Newton

On note $H_0 := 1$ et, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$H_i := \prod_{j=0}^{i-1} (X - c_j) = (X - c_0) \cdots (X - c_{i-1}).$$

Proposition et définition 5

La famille $\{H_0, \ldots, H_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

IV. Méthode de Newton

On note $H_0 := 1$ et, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$H_i := \prod_{j=0}^{i-1} (X - c_j) = (X - c_0) \cdots (X - c_{i-1}).$$

Proposition et définition 5

La famille $\{H_0, \ldots, H_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, appelée base de Newton associée aux centres $c_0, \ldots, c_n$

IV. Méthode de Newton

On note $H_0 := 1$ et, pour $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$H_i := \prod_{j=0}^{i-1} (X - c_j) = (X - c_0) \cdots (X - c_{i-1}).$$

Proposition et définition 5

La famille $\{H_0, \dots, H_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, appelée <u>base de Newton associée aux centres $c_0, \dots, c_n$</u>

<u>Conséquence :</u> Il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ uniques tels que

$$P_{f, c_0, \dots, c_n} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_i.$$

Proposition 6

Si $k \in \{0, \ldots, n\}$, $P_{f,c_0,\ldots,c_k} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i H_i$.

IV. Méthode de Newton

Proposition 6

Si $k \in \{0, \dots, n\}$, $P_{f,c_0,\dots,c_k} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i H_i$.

Conséquence : Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, α_i ne dépend que de f et $c_0, \dots, c_i$

IV. Méthode de Newton

Proposition 6

Si $k \in \{0, \dots, n\}$, $P_{f,c_0,\dots,c_k} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i H_i$.

Consequence : Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, α_i ne dépend que de f et $c_0, \dots, c_i$: on note

$$f[c_0, \dots, c_i] := \alpha_i.$$

Proposition 6

Si $k \in \{0, \ldots, n\}$, $P_{f,c_0,\ldots,c_k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \alpha_i H_i$.

Consequence : Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, α_i ne dépend que de f et $c_0, \ldots, c_i$: on note

$$f[c_0, \ldots, c_i] := \alpha_i.$$

Définition 7

Le nombre $f[c_0, \ldots, c_i]$ est appelé la $i^{\text{ème}}$ différence divisée de f en les centres $c_0, \ldots, c_i$.

IV. Méthode de Newton

Proposition 6

Si $k \in \{0, \ldots, n\}$, $P_{f,c_0,\ldots,c_k} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i H_i$.

Consequence : Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, α_i ne dépend que de f et $c_0, \ldots, c_i$: on note

$$f[c_0, \ldots, c_i] := \alpha_i.$$

Définition 7

Le nombre $f[c_0, \ldots, c_i]$ est appelé la $i^{\text{ème}}$ différence divisée de f en les centres $c_0, \ldots, c_i$.

La méthode de Newton consiste à calculer la somme

$$\sum_{i=0}^{n} f[c_0, \ldots, c_i] H_i$$

IV. Méthode de Newton

Proposition 6

Si $k \in \{0, \dots, n\}$, $P_{f,c_0,\dots,c_k} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i H_i$.

Consequence : Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, α_i ne dépend que de f et $c_0, \dots, c_i$: on note

$$f[c_0, \dots, c_i] := \alpha_i.$$

Définition 7

Le nombre $f[c_0, \dots, c_i]$ est appelé la $i^{\text{ème}}$ différence divisée de f en les centres $c_0, \dots, c_i$.

La méthode de Newton consiste à calculer la somme

$$\sum_{i=0}^{n} f[c_0, \dots, c_i] H_i = P_{f,c_0,\dots,c_n}.$$

Proposition 8

Proposition 8

On a $f[c_0] = f(c_0)$

Proposition 8

On a $f[c_0] = f(c_0)$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

IV. Méthode de Newton

Proposition 8

On a $f[c_0] = f(c_0)$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$f[c_0, \ldots, c_i] = \frac{f[c_1, \ldots, c_i] - f[c_0, \ldots, c_{i-1}]}{c_i - c_0}$$

Proposition 8

On a $f[c_0] = f(c_0)$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$f[c_0, \ldots, c_i] = \frac{f[c_1, \ldots, c_i] - f[c_0, \ldots, c_{i-1}]}{c_i - c_0}$$

Remarque : Si $i \in \{0, \ldots, n\}$, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_{\{0,\ldots,i\}}$,

$$f[c_{\sigma(0)}, \ldots, c_{\sigma(i)}] = f[c_0, \ldots, c_i].$$

Proposition 8

On a $f[c_0] = f(c_0)$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$f[c_0, \dots, c_i] = \frac{f[c_1, \dots, c_i] - f[c_0, \dots, c_{i-1}]}{c_i - c_0}$$

<u>Remarque :</u> Si $i \in \{0, \dots, n\}$, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_{\{0,\dots,i\}}$,

$$f[c_{\sigma(0)}, \dots, c_{\sigma(i)}] = f[c_0, \dots, c_i].$$

Un algorithme permettant de calculer $f[c_0, \dots, c_i]$ est :

IV. Méthode de Newton

Proposition 8

On a $f[c_0] = f(c_0)$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$f[c_0, \dots, c_i] = \frac{f[c_1, \dots, c_i] - f[c_0, \dots, c_{i-1}]}{c_i - c_0}$$

Remarque : Si $i \in \{0, \dots, n\}$, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_{\{0,\dots,i\}}$,

$$f[c_{\sigma(0)}, \dots, c_{\sigma(i)}] = f[c_0, \dots, c_i].$$

Un algorithme permettant de calculer $f[c_0, \dots, c_i]$ est :

$a_l \leftarrow y_l$, $l \in \{0, \dots, k\}$
for $i = 1$ à k **do**
  for $j = 0$ à $k - i$ **do**
    $a_j \leftarrow \frac{a_{j+1} - a_j}{c_{j+i} - c_j}$
  end for
end for
Return a_0

IV. Méthode de Newton

Remarque :

IV. Méthode de Newton

Remarque : Une fois obtenue la décomposition

$$P_{f,c_0,\ldots,c_n} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_i$$

IV. Méthode de Newton

Remarque : Une fois obtenue la décomposition

$$\begin{aligned} P_{f,c_0,\dots,c_n} &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \prod_{j=0}^{i-1} (X - c_j) \end{aligned}$$

IV. Méthode de Newton

Remarque : Une fois obtenue la décomposition

$$\begin{aligned} P_{f,c_0,\dots,c_n} &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \prod_{j=0}^{i-1} (X - c_j) \end{aligned}$$

$$= \alpha_0 + (X - c_0)\Big(\alpha_1 + (X - c_1)\Big(\cdots + (X - c_{n-2})(\alpha_{n-1} + (X - c_{n-1})\alpha_n\Big)\cdots\Big)\Big)$$

IV. Méthode de Newton

Remarque : Une fois obtenue la décomposition

$$\begin{aligned} P_{f,c_0,\ldots,c_n} &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \prod_{j=0}^{i-1} (X - c_j) \end{aligned}$$

$$= \alpha_0 + (X - c_0)\Big(\alpha_1 + (X - c_1)\Big(\cdots + (X - c_{n-2})(\alpha_{n-1} + (X - c_{n-1})\alpha_n\Big)\cdots\Big)\Big)$$

on peut calculer l'évaluation de $P_{f,c_0,\ldots,c_n}$ en $x \in [a, b]$ à l'aide de l'algorithme :

IV. Méthode de Newton

Remarque : Une fois obtenue la décomposition

$$\begin{aligned} P_{f,c_0,\ldots,c_n} &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \prod_{j=0}^{i-1} (X - c_j) \end{aligned}$$

$$= \alpha_0 + (X - c_0)\big(\alpha_1 + (X - c_1)\big(\cdots + (X - c_{n-2})(\alpha_{n-1} + (X - c_{n-1})\alpha_n)\cdots\big)\big)$$

on peut calculer l'évaluation de $P_{f,c_0,\ldots,c_n}$ en $x \in [a, b]$ à l'aide de l'algorithme :

$r \leftarrow \alpha_n$
for $i = n - 1$ à 0 **do**
    $r \leftarrow \alpha_i + (x - c_i) r$
end for
Return r

V. Erreur d'interpolation

V. Erreur d'interpolation

On note

$$e : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - P_{f,c_0,\dots,c_n}(x) \end{array}$$

V. Erreur d'interpolation

On note

$$e : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - P_{f,c_0,\ldots,c_n}(x) \end{array}$$

Définition 9

La fonction e est appelée <u>erreur d'interpol. de f aux centres $c_0, \ldots, c_n$</u>.

V. Erreur d'interpolation

On note

$$e: \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - P_{f,c_0,\ldots,c_n}(x) \end{array}$$

Définition 9

La fonction e est appelée erreur d'interpol. de f aux centres $c_0, \ldots, c_n$.

Supposons que f soit $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$. Alors :

V. Erreur d'interpolation

On note

$$e: \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - P_{f,c_0,\ldots,c_n}(x) \end{array}$$

Définition 9

La fonction e est appelée erreur d'interpol. de f aux centres $c_0, \ldots, c_n$.

Supposons que f soit $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$. Alors :

Théorème 10

Pour tout $x \in [a, b]$,

On note

$$e : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - P_{f,c_0,\ldots,c_n}(x) \end{array}$$

Définition 9

La fonction e est appelée erreur d'interpol. de f aux centres $c_0, \ldots, c_n$.

Supposons que f soit $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$. Alors :

Théorème 10

Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

V. Erreur d'interpolation

On note

$$e : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - P_{f,c_0,\dots,c_n}(x) \end{array}$$

Définition 9

La fonction e est appelée erreur d'interpol. de f aux centres $c_0, \dots, c_n$.

Supposons que f soit $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$. Alors :

Théorème 10

Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - c_i).$$

Théorème 10

Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - c_i).$$

V. Erreur d'interpolation

Théorème 10

Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - c_i).$$

Etapes de la preuve :

V. Erreur d'interpolation

Théorème 10

Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - c_i).$$

Etapes de la preuve :

1. Soit $x \in [a, b]$.

V. Erreur d'interpolation

Théorème 10

Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - c_i).$$

<u>Etapes de la preuve :</u>

1. Soit $x \in [a, b]$. On peut supposer $x \notin \{c_0, \ldots, c_n\}$.

V. Erreur d'interpolation

Théorème 10

Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - c_i).$$

Etapes de la preuve :

1. Soit $x \in [a, b]$. On peut supposer $x \notin \{c_0, \ldots, c_n\}$.
2. On a

$$e(x) = f[c_0, \ldots, c_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - c_i).$$

V. Erreur d'interpolation

Théorème 10

Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - c_i).$$

Etapes de la preuve :

1. Soit $x \in [a, b]$. On peut supposer $x \notin \{c_0, \ldots, c_n\}$.
2. On a
$$e(x) = f[c_0, \ldots, c_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - c_i).$$
3. Il existe $\xi \in]a, b[$ tel que
$$f[c_0, \ldots, c_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Erreur d'interpolation

3. Il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f[c_0, \ldots, c_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Erreur d'interpolation

3. Il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f[c_0, \ldots, c_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Ce dernier fait utilise la généralisation suivante du *théorème de Rolle* :

Erreur d'interpolation

3. Il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f[c_0, \ldots, c_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Ce dernier fait utilise la généralisation suivante du *théorème de Rolle* :

Lemme 11

Soient $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tels que

3. Il existe $\xi \in]a, b[$ tel que
$$f[c_0, \ldots, c_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Ce dernier fait utilise la généralisation suivante du *théorème de Rolle* :

Lemme 11

Soient $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tels que

- h est dérivable m fois sur $[a, b]$,

Erreur d'interpolation

3. Il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f[c_0, \dots, c_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Ce dernier fait utilise la généralisation suivante du *théorème de Rolle* :

Lemme 11

Soient $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tels que

- h est dérivable m fois sur $[a, b]$,
- h s'annule en $m + 1$ points deux à deux distincts de $[a, b]$.

Erreur d'interpolation

3. Il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f[c_0, \ldots, c_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Ce dernier fait utilise la généralisation suivante du *théorème de Rolle* :

Lemme 11

Soient $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tels que

- h est dérivable m fois sur $[a, b]$,
- h s'annule en $m + 1$ points deux à deux distincts de $[a, b]$.

Alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $h^{(m)}(\xi) = 0$.

V. Erreur d'interpolation

Théorème 10

Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - c_i).$$

V. Erreur d'interpolation

Théorème 10

Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - c_i).$$

Conséquence :

V. Erreur d'interpolation

Théorème 10

Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - c_i).$$

Conséquence : Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$,

V. Erreur d'interpolation

Théorème 10

Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - c_i).$$

Conséquence : Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$,

$$\|e\|_{\infty,[a,b]} = \|f - P_{f,c_0,\dots,c_n}\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a,b]}}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} \left|\prod_{i=0}^{n}(x - c_i)\right|$$

(où, si $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, $\|h\|_{\infty,[a,b]} := \max_{x\in[a,b]} |h(x)|$).

V. Erreur d'interpolation

Théorème 10

Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - c_i).$$

<u>Conséquence :</u> Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$,

$$\|e\|_{\infty,[a,b]} = \|f - P_{f,c_0,\ldots,c_n}\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a,b]}}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - c_i) \right|$$

(où, si $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, $\|h\|_{\infty,[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} |h(x)|$).

<u>Mais :</u> la suite $\left(\|f - P_{f,c_0,\ldots,c_n}\|_{\infty,[a,b]}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas nécessairement vers 0 !

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

But : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on construit des centres $c_{n,0}, \ldots, c_{n,n} \in [a, b]$ tels que

But : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on construit des centres $c_{n,0}, \ldots, c_{n,n} \in [a, b]$ tels que

- $\left\| f - P_{f, c_{n,0}, \ldots, c_{n,n}} \right\|_{\infty, [a,b]} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$

<u>But :</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on construit des centres $c_{n,0}, \dots, c_{n,n} \in [a, b]$ tels que

- $\left\| f - P_{f, c_{n,0}, \dots, c_{n,n}} \right\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$,
- la quantité $\displaystyle\max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - c_{n,i}) \right|$ est minimale.

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

On pose $T_0 := 1$, $T_1 := X$

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

On pose $T_0 := 1$, $T_1 := X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

On pose $T_0 := 1$, $T_1 := X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} := 2XT_{n+1} - T_n.$$

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

On pose $T_0 := 1$, $T_1 := X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} := 2XT_{n+1} - T_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

On pose $T_0 := 1$, $T_1 := X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} := 2XT_{n+1} - T_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition 11

T_n est appelé le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev.

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

On pose $T_0 := 1$, $T_1 := X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} := 2XT_{n+1} - T_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition 11

T_n est appelé le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev.

Remarque : $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{lcoef}(T_n) = 2^{n-1}$.

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

On pose $T_0 := 1$, $T_1 := X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} := 2XT_{n+1} - T_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition 11

T_n est appelé le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev.

Remarque : $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{lcoef}(T_n) = 2^{n-1}$.

Proposition 12

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

On pose $T_0 := 1$, $T_1 := X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} := 2XT_{n+1} - T_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition 11

T_n est appelé le <u>$n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev</u>.

<u>Remarque :</u> $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{lcoef}(T_n) = 2^{n-1}$.

Proposition 12

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.

Supposons que $n \neq 0$. Alors :

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

On pose $T_0 := 1$, $T_1 := X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} := 2XT_{n+1} - T_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition 11

T_n est appelé le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev.

Remarque : $\deg(T_n) = n$ et $\operatorname{lcoef}(T_n) = 2^{n-1}$.

Proposition 12

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.

Supposons que $n \neq 0$. Alors :

Corollaire 13

Les racines de T_n sont les nombres

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

On pose $T_0 := 1$, $T_1 := X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} := 2XT_{n+1} - T_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition 11

T_n est appelé le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev.

Remarque : $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{lcoef}(T_n) = 2^{n-1}$.

Proposition 12

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.

Supposons que $n \neq 0$. Alors :

Corollaire 13

Les racines de T_n sont les nombres

$$\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \ k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

Théorème 14

$\frac{1}{2^{n-1}} T_n$ est l'unique polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{R}[X]$ tel que

Théorème 14

$\frac{1}{2^{n-1}} T_n$ est l'unique polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\left\| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \right\|_{\infty,[-1,1]} = \min\{\|Q\|_{\infty,[-1,1]},\ Q \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré } n \text{ unitaire}\}.$$

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

Théorème 14

$\frac{1}{2^{n-1}} T_n$ est l'unique polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\left\| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \right\|_{\infty,[-1,1]} = \min\{\|Q\|_{\infty,[-1,1]},\ Q \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré } n \text{ unitaire}\}.$$

Conséquence : Soit $c_0, \ldots, c_n \in [a, b]$.

Théorème 14

$\frac{1}{2^{n-1}} T_n$ est l'unique polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\left\| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \right\|_{\infty,[-1,1]} = \min\{\|Q\|_{\infty,[-1,1]},\ Q \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré } n \text{ unitaire}\}.$$

Conséquence : Soit $c_0, \ldots, c_n \in [a, b]$. Si $[a, b] = [-1, 1]$,

Théorème 14

$\frac{1}{2^{n-1}} T_n$ est l'unique polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\left\| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \right\|_{\infty,[-1,1]} = \min\{\|Q\|_{\infty,[-1,1]},\ Q \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré } n \text{ unitaire}\}.$$

Conséquence : Soit $c_0, \ldots, c_n \in [a, b]$. Si $[a, b] = [-1, 1]$, la quantité

$$\max_{x\in[-1,1]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - c_i) \right| = \left\| \prod_{i=0}^{n} (X - c_i) \right\|_{\infty,[-1,1]} \quad \text{est minimale ssi}$$

Théorème 14

$\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ est l'unique polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\left\|\frac{1}{2^{n-1}}T_n\right\|_{\infty,[-1,1]} = \min\{\|Q\|_{\infty,[-1,1]},\ Q \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré } n \text{ unitaire}\}.$$

Conséquence : Soit $c_0, \dots, c_n \in [a,b]$. Si $[a,b] = [-1,1]$, la quantité

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)\right| = \left\|\prod_{i=0}^{n}(X-c_i)\right\|_{\infty,[-1,1]} \quad \text{est minimale ssi}$$

$$\prod_{i=0}^{n}(X-c_i) = \frac{1}{2^n}T_{n+1}$$

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

Théorème 14

$\frac{1}{2^{n-1}} T_n$ est l'unique polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\left\| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \right\|_{\infty,[-1,1]} = \min\{\|Q\|_{\infty,[-1,1]},\ Q \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré } n \text{ unitaire}\}.$$

Conséquence : Soit $c_0, \dots, c_n \in [a,b]$. Si $[a,b] = [-1,1]$, la quantité

$$\max_{x\in[-1,1]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - c_i) \right| = \left\| \prod_{i=0}^{n} (X - c_i) \right\|_{\infty,[-1,1]} \quad \text{est minimale ssi}$$

$$\prod_{i=0}^{n} (X - c_i) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}$$

ssi

$$\{c_0, \dots, c_n\} = \left\{ \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \right),\ k \in \{0, \dots, n\} \right\}.$$

Dans le cas général,

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

Dans le cas général, la quantité $\max_{x\in[a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - c_i) \right|$ est minimale ssi

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

Dans le cas général, la quantité $\max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - c_i) \right|$ est minimale ssi

$$\{c_0, \ldots, c_n\} = \left\{ \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \right), \ k \in \{0, \ldots, n\} \right\},$$

Dans le cas général, la quantité $\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)\right|$ est minimale ssi

$$\{c_0,\ldots,c_n\}=\left\{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right),\ k\in\{0,\ldots,n\}\right\},$$

et dans ce cas

$$\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)\right|=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{2^n}.$$

Dans le cas général, la quantité $\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)\right|$ est minimale ssi

$$\{c_0,\dots,c_n\}=\left\{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right),\ k\in\{0,\dots,n\}\right\},$$

et dans ce cas

$$\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)\right|=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{2^n}.$$

Si l'on note alors e_n^T l'erreur d'interpolation de f correspondante, on a

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

Dans le cas général, la quantité $\max_{x\in[a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - c_i) \right|$ est minimale ssi

$$\{c_0, \ldots, c_n\} = \left\{ \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \right),\ k \in \{0, \ldots, n\} \right\},$$

et dans ce cas

$$\max_{x\in[a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - c_i) \right| = \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1} \frac{1}{2^n}.$$

Si l'on note alors e_n^T l'erreur d'interpolation de f correspondante, on a

$$\left\| e_n^T \right\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty,[a,b]}}{2^n (n+1)!} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1}.$$

Définition 15

On appelle les points

$$c_{n,k}^{T} := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right),\ \ k \in \{0,\dots,n\}$$

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

Définition 15

On appelle les points

$$c_{n,k}^{T} := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \; k \in \{0, \ldots, n\}$$

les <u>centres de Tchebychev d'ordre n du segment $[a, b]$</u>.

Définition 15

On appelle les points

$$c_{n,k}^T := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right),\ k \in \{0,\dots,n\}$$

les centres de Tchebychev d'ordre n du segment $[a,b]$.

Remarque : Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$ et

$$\frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a,b]}}{2^n(n+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

Définition 15

On appelle les points

$$c_{n,k}^{T} := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \ k \in \{0, \ldots, n\}$$

les centres de Tchebychev d'ordre n du segment $[a, b]$.

Remarque : Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b]$ et

$$\frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a,b]}}{2^n (n+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

alors $\left\|e_n^T\right\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

Définition 15

On appelle les points

$$c_{n,k}^T := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right),\ k \in \{0,\dots,n\}$$

les centres de Tchebychev d'ordre n du segment $[a,b]$.

Remarque : Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$ et

$$\frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a,b]}}{2^n(n+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

alors $\left\|e_n^T\right\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Plus simplement :

VI. Polynômes et centres de Tchebychev

Définition 15

On appelle les points

$$c_{n,k}^T := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \; k \in \{0, \dots, n\}$$

les centres de Tchebychev d'ordre n du segment $[a, b]$.

Remarque : Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b]$ et

$$\frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a,b]}}{2^n(n+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

alors $\left\|e_n^T\right\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Plus simplement :

Théorème 16

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors $\left\|e_n^T\right\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$