Chapitre 1 : Extensions de corps et algébricité

I. Introduction

Dans ce corps, un corps est un anneau commutatif unitaire dont tout élément non nul est inversible.

Dans ce corps, un corps est un anneau commutatif unitaire dont tout élément non nul est inversible.

Exemples

I. Introduction

Dans ce corps, un corps est un anneau commutatif unitaire dont tout élément non nul est inversible.

Exemples

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$,

I. Introduction

Dans ce corps, un corps est un anneau commutatif unitaire dont tout élément non nul est inversible.

Exemples

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$,

I. Introduction

Dans ce corps, un corps est un anneau commutatif unitaire dont tout élément non nul est inversible.

Exemples

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,

I. Introduction

Dans ce corps, un corps est un anneau commutatif unitaire dont tout élément non nul est inversible.

Exemples

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,...
- $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p \in \mathbb{N}$ premier,

I. Introduction

Dans ce corps, un corps est un anneau commutatif unitaire dont tout élément non nul est inversible.

Exemples

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,...
- $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p \in \mathbb{N}$ premier, les corps finis.

II. Extensions de corps

Soient L un corps et K un sous-corps de L.

II. Extensions de corps

Soient L un corps et K un sous-corps de L.

Définition 1

On dit que l'inclusion $K \subset L$ est une <u>extension de K</u>

Soient L un corps et K un sous-corps de L.

Définition 1

On dit que l'inclusion $K \subset L$ est une extension de K (ou plus simplement que L est une extension de K).

II. Extensions de corps

Soient L un corps et K un sous-corps de L.

Définition 1

On dit que l'inclusion $K \subset L$ est une <u>extension de K</u> (ou plus simplement que L est une <u>extension de K</u>).

Exemples

II. Extensions de corps

Soient L un corps et K un sous-corps de L.

Définition 1

On dit que l'inclusion $K \subset L$ est une extension de K (ou plus simplement que L est une extension de K).

Exemples

- $\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}$,

II. Extensions de corps

Soient L un corps et K un sous-corps de L.

Définition 1

On dit que l'inclusion $K \subset L$ est une extension de K (ou plus simplement que L est une extension de K).

Exemples

- $\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$,

II. Extensions de corps

Soient L un corps et K un sous-corps de L.

Définition 1

On dit que l'inclusion $K \subset L$ est une extension de K (ou plus simplement que L est une extension de K).

Exemples

- $\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{Q}$,

II. Extensions de corps

Soient L un corps et K un sous-corps de L.

Définition 1

On dit que l'inclusion $K \subset L$ est une <u>extension de K</u> (ou plus simplement que L est une <u>extension de K</u>).

Exemples

- $\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est une extension de $\mathbb{Q}$,

II. Extensions de corps

Soient L un corps et K un sous-corps de L.

Définition 1

On dit que l'inclusion $K \subset L$ est une <u>extension de K</u> (ou plus simplement que L est une <u>extension de K</u>).

Exemples

- $\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est une extension de $\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

II. Extensions de corps

Soient L un corps et K un sous-corps de L.

Définition 1

On dit que l'inclusion $K \subset L$ est une extension de K (ou plus simplement que L est une extension de K).

Exemples

- $\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est une extension de $\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Remarque 2

Si M est une extension de L, alors M est une extension de K.

Proposition 3

L est un K-espace vectoriel.

II. Extensions de corps

Proposition 3

L est un K-espace vectoriel.

On appelle <u>degré de l'extension L sur K</u> la quantité $[L : K] := \dim_K L$.

Proposition 3

L est un K-espace vectoriel.

On appelle degré de l'extension L sur K la quantité $[L : K] := \dim_K L$.

Définition 4

- Si $[L : K] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on dit que L est de degré fini sur K,

Proposition 3

L est un K-espace vectoriel.

On appelle <u>degré de l'extension L sur K</u> la quantité $[L : K] := \dim_K L$.

Définition 4

- Si $[L : K] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on dit que L est <u>de degré fini sur K</u>,
- Sinon, on dit que L est <u>de degré infini sur K</u>.

II. Extensions de corps

Proposition 3

L est un K-espace vectoriel.

On appelle degré de l'extension L sur K la quantité $[L : K] := \dim_K L$.

Définition 4

- Si $[L : K] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on dit que L est de degré fini sur K,
- Sinon, on dit que L est de degré infini sur K.

Remarque : $[L : K] = 1$ ssi $L = K$.

Proposition 3

L est un K-espace vectoriel.

On appelle degré de l'extension L sur K la quantité $[L : K] := \dim_K L$.

Définition 4

- Si $[L : K] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on dit que L est de degré fini sur K,
- Sinon, on dit que L est de degré infini sur K.

Remarque : $[L : K] = 1$ ssi $L = K$.

Théorème 5

Soit M une extension de L. Alors $[M : K] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ssi $[M : L] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $[L : K] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

II. Extensions de corps

Proposition 3

L est un K-espace vectoriel.

On appelle degré de l'extension L sur K la quantité $[L:K] := \dim_K L$.

Définition 4

- Si $[L:K] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on dit que L est de degré fini sur K,
- Sinon, on dit que L est de degré infini sur K.

Remarque : $[L:K] = 1$ ssi $L = K$.

Théorème 5

Soit M une extension de L. Alors $[M:K] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ssi $[M:L] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $[L:K] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et dans ce cas

$$[M:K] = [M:L][L:K]$$

II. Extensions de corps

Proposition 3

L est un K-espace vectoriel.

On appelle degré de l'extension L sur K la quantité $[L:K] := \dim_K L$.

Définition 4

- Si $[L:K] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on dit que L est de degré fini sur K,
- Sinon, on dit que L est de degré infini sur K.

Remarque : $[L:K] = 1$ ssi $L = K$.

Théorème 5

Soit M une extension de L. Alors $[M:K] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ssi $[M:L] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $[L:K] \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et dans ce cas

$$[M:K] = [M:L][L:K]$$

(en particulier, $[M:L]$ et $[L:K]$ divisent $[M:K]$).

III. Extensions engendrées

Soit A un sous-ensemble de L.

III. Extensions engendrées

Soit A un sous-ensemble de L. On note $K(A)$ l'intersection de tous les sous-corps de L contenant K et A

III. Extensions engendrées

Soit A un sous-ensemble de L. On note $K(A)$ l'intersection de tous les sous-corps de L contenant K et A : il s'agit du plus petit sous-corps de L contenant K et A.

Soit A un sous-ensemble de L. On note $K(A)$ l'intersection de tous les sous-corps de L contenant K et A : il s'agit du plus petit sous-corps de L contenant K et A.

Définition 6

$K(A)$ est appelé sous-corps de L engendré par K et A.

III. Extensions engendrées

Soit A un sous-ensemble de L. On note $K(A)$ l'intersection de tous les sous-corps de L contenant K et A : il s'agit du plus petit sous-corps de L contenant K et A.

Définition 6

$K(A)$ est appelé sous-corps de L engendré par K et A.

Si $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$, on note $K(A) = K(a_1, \ldots, a_p)$.

III. Extensions engendrées

Soit A un sous-ensemble de L. On note $K(A)$ l'intersection de tous les sous-corps de L contenant K et A : il s'agit du plus petit sous-corps de L contenant K et A.

Définition 6

$K(A)$ est appelé sous-corps de L engendré par K et A.

Si $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$, on note $K(A) = K(a_1, \ldots, a_p)$.

Proposition 7

Soit B un sous-ensemble de L.

Soit A un sous-ensemble de L. On note $K(A)$ l'intersection de tous les sous-corps de L contenant K et A : il s'agit du plus petit sous-corps de L contenant K et A.

Définition 6

$K(A)$ est appelé sous-corps de L engendré par K et A.

Si $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$, on note $K(A) = K(a_1, \ldots, a_p)$.

Proposition 7

Soit B un sous-ensemble de L. Alors
$K(A \cup B) = \big(K(A)\big)(B) = \big(K(B)\big)(A)$.

III. Extensions engendrées

Soit A un sous-ensemble de L. On note $K(A)$ l'intersection de tous les sous-corps de L contenant K et A : il s'agit du plus petit sous-corps de L contenant K et A.

Définition 6

$K(A)$ est appelé sous-corps de L engendré par K et A.

Si $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$, on note $K(A) = K(a_1, \ldots, a_p)$.

Proposition 7

Soit B un sous-ensemble de L. Alors
$K(A \cup B) = \big(K(A)\big)(B) = \big(K(B)\big)(A)$.

Remarque : On écrira simplement $K(A)(B) := \big(K(A)\big)(B)$

III. Extensions engendrées

Soit A un sous-ensemble de L. On note $K(A)$ l'intersection de tous les sous-corps de L contenant K et A : il s'agit du plus petit sous-corps de L contenant K et A.

Définition 6

$K(A)$ est appelé sous-corps de L engendré par K et A.

Si $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$, on note $K(A) = K(a_1, \ldots, a_p)$.

Proposition 7

Soit B un sous-ensemble de L. Alors
$K(A \cup B) = \big(K(A)\big)(B) = \big(K(B)\big)(A)$.

Remarque : On écrira simplement $K(A)(B) := \big(K(A)\big)(B) = K(B)(A)$.

III. Extensions engendrées

Soit A un sous-ensemble de L. On note $K(A)$ l'intersection de tous les sous-corps de L contenant K et A : il s'agit du plus petit sous-corps de L contenant K et A.

Définition 6

$K(A)$ est appelé <u>sous-corps de L engendré par K et A</u>.

Si $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$, on note $K(A) = K(a_1, \ldots, a_p)$.

Proposition 7

Soit B un sous-ensemble de L. Alors
$K(A \cup B) = \big(K(A)\big)(B) = \big(K(B)\big)(A)$.

<u>Remarque :</u> On écrira simplement $K(A)(B) := \big(K(A)\big)(B) = K(B)(A)$.

Proposition 8

$$K(A) = \left\{ \frac{S(a_1, \ldots, a_k)}{T(a_1, \ldots, a_k)} \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_k \in A,\ \frac{S}{T} \in K(X_1, \ldots, X_k) \right\}.$$

Soit $a \in L$.

Soit $a \in L$.

Définition 9

On dit que a est

IV. Eléments algébriques

Soit $a \in L$.

Définition 9

On dit que a est

- algébrique sur K s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(a) = 0$,

IV. Eléments algébriques

Soit $a \in L$.

Définition 9

On dit que a est

- algébrique sur K s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(a) = 0$,
- transcendant sur K sinon.

IV. Eléments algébriques

Soit $a \in L$.

Définition 9

On dit que a est

- <u>algébrique sur K</u> s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(a) = 0$,
- <u>transcendant sur K</u> sinon.

Exemples

- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$,

IV. Eléments algébriques

Soit $a \in L$.

Définition 9

On dit que a est

- algébrique sur K s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(a) = 0$,
- transcendant sur K sinon.

Exemples

- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$,
- $i \in \mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$,

IV. Eléments algébriques

Soit $a \in L$.

Définition 9

On dit que a est

- algébrique sur K s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(a) = 0$,
- transcendant sur K sinon.

Exemples

- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$,
- $i \in \mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$,
- si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$,

IV. Eléments algébriques

Soit $a \in L$.

Définition 9

On dit que a est

- algébrique sur K s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(a) = 0$,
- transcendant sur K sinon.

Exemples

- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$,
- $i \in \mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$,
- si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$,
- e et π sont transcendants sur $\mathbb{Q}$.

IV. Eléments algébriques

Soit $a \in L$.

Définition 9

On dit que a est

- algébrique sur K s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(a) = 0$,
- transcendant sur K sinon.

Exemples

- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$,
- $i \in \mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$,
- si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$,
- e et π sont transcendants sur $\mathbb{Q}$.

Remarque : Si $a \in K$, a est algébrique sur K.

On note $I_a := \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$.

On note $I_a := \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$. Alors :

IV. Eléments algébriques

On note $I_a := \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$. Alors :

- $I_a \neq \{0\}$ ssi a est algébrique sur K,

IV. Eléments algébriques

On note $I_a := \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$. Alors :

- $I_a \neq \{0\}$ ssi a est algébrique sur K,
- I_a est un idéal de l'anneau <u>principal</u> $K[X]$.

IV. Eléments algébriques

On note $I_a := \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$. Alors :

- $I_a \neq \{0\}$ ssi a est algébrique sur K,
- I_a est un idéal de l'anneau principal $K[X]$.

On suppose dans la suite que a est algébrique sur K.

IV. Eléments algébriques

On note $I_a := \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$. Alors :

- $I_a \neq \{0\}$ ssi a est algébrique sur K,
- I_a est un idéal de l'anneau principal $K[X]$.

On suppose dans la suite que a est algébrique sur K. Alors :

IV. Eléments algébriques

On note $I_a := \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$. Alors :

- $I_a \neq \{0\}$ ssi a est algébrique sur K,
- I_a est un idéal de l'anneau principal $K[X]$.

On suppose dans la suite que a est algébrique sur K. Alors :

Proposition et Définition 10

Il existe un unique polynôme non constant unitaire $\mu_{a,K}$ tel que $I_a = (\mu_{a,K})$,

IV. Eléments algébriques

On note $I_a := \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$. Alors :

- $I_a \neq \{0\}$ ssi a est algébrique sur K,
- I_a est un idéal de l'anneau <u>principal</u> $K[X]$.

On suppose dans la suite que a est algébrique sur K. Alors :

Proposition et Définition 10

Il existe un unique polynôme non constant <u>unitaire</u> $\mu_{a,K}$ tel que $I_a = (\mu_{a,K})$, appelé <u>le polynôme minimal de a sur K</u>.

IV. Eléments algébriques

On note $I_a := \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$. Alors :

- $I_a \neq \{0\}$ ssi a est algébrique sur K,
- I_a est un idéal de l'anneau principal $K[X]$.

On suppose dans la suite que a est algébrique sur K. Alors :

Proposition et Définition 10

Il existe un unique polynôme non constant unitaire $\mu_{a,K}$ tel que $I_a = (\mu_{a,K})$, appelé le polynôme minimal de a sur K.

Soit $P \in K[X]$.

IV. Eléments algébriques

On note $I_a := \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$. Alors :

- $I_a \neq \{0\}$ ssi a est algébrique sur K,
- I_a est un idéal de l'anneau principal $K[X]$.

On suppose dans la suite que a est algébrique sur K. Alors :

Proposition et Définition 10

Il existe un unique polynôme non constant unitaire $\mu_{a,K}$ tel que $I_a = (\mu_{a,K})$, appelé le polynôme minimal de a sur K.

Soit $P \in K[X]$.

Proposition 11

$P = \mu_{a,K}$ ssi P est unitaire, irréductible sur $K[X]$ et $P(a) = 0$.

IV. Eléments algébriques

On note $I_a := \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$. Alors :

- $I_a \neq \{0\}$ ssi a est algébrique sur K,
- I_a est un idéal de l'anneau principal $K[X]$.

On suppose dans la suite que a est algébrique sur K. Alors :

Proposition et Définition 10

Il existe un unique polynôme non constant unitaire $\mu_{a,K}$ tel que $I_a = (\mu_{a,K})$, appelé le polynôme minimal de a sur K.

Soit $P \in K[X]$.

Proposition 11

$P = \mu_{a,K}$ ssi P est unitaire, irréductible sur $K[X]$ et $P(a) = 0$.

Remarque : $\deg \mu_{a,K} = 1$ ssi $\mu_{a,K} = X - a$ ssi $a \in K$.

IV. Eléments algébriques

On note $I_a := \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$. Alors :

- $I_a \neq \{0\}$ ssi a est algébrique sur K,
- I_a est un idéal de l'anneau principal $K[X]$.

On suppose dans la suite que a est algébrique sur K. Alors :

Proposition et Définition 10

Il existe un unique polynôme non constant unitaire $\mu_{a,K}$ tel que $I_a = (\mu_{a,K})$, appelé le polynôme minimal de a sur K.

Soit $P \in K[X]$.

Proposition 11

$P = \mu_{a,K}$ ssi P est unitaire, irréductible sur $K[X]$ et $P(a) = 0$.

Remarque : $\deg \mu_{a,K} = 1$ ssi $\mu_{a,K} = X - a$ ssi $a \in K$.

Définition 12

Si $d = \deg \mu_{a,K}$,

IV. Eléments algébriques

On note $I_a := \{P \in K[X] \mid P(a) = 0\}$. Alors :

- $I_a \neq \{0\}$ ssi a est algébrique sur K,
- I_a est un idéal de l'anneau principal $K[X]$.

On suppose dans la suite que a est algébrique sur K. Alors :

Proposition et Définition 10

Il existe un unique polynôme non constant unitaire $\mu_{a,K}$ tel que $I_a = (\mu_{a,K})$, appelé le polynôme minimal de a sur K.

Soit $P \in K[X]$.

Proposition 11

$P = \mu_{a,K}$ ssi P est unitaire, irréductible sur $K[X]$ et $P(a) = 0$.

Remarque : $\deg \mu_{a,K} = 1$ ssi $\mu_{a,K} = X - a$ ssi $a \in K$.

Définition 12

Si $d = \deg \mu_{a,K}$, on dit que a est algébrique de degré d sur K.

Soit $b \in L$.

IV. Eléments algébriques

Soit $b \in L$. On note $K[b] := \{P(b) \mid P \in K[X]\}$

Soit $b \in L$. On note $K[b] := \{P(b) \mid P \in K[X]\}$: il s'agit du plus petit sous-anneau de L contenant K et b.

Soit $b \in L$. On note $K[b] := \{P(b) \mid P \in K[X]\}$: il s'agit du plus petit sous-anneau de L contenant K et b. En particulier, $K[b] \subset K(b)$.

Soit $b \in L$. On note $K[b] := \{P(b) \mid P \in K[X]\}$: il s'agit du plus petit sous-anneau de L contenant K et b. En particulier, $K[b] \subset K(b)$.

Remarque : $K[b]$ est un K-ev,

Soit $b \in L$. On note $K[b] := \{P(b) \mid P \in K[X]\}$: il s'agit du plus petit sous-anneau de L contenant K et b. En particulier, $K[b] \subset K(b)$.

Remarque : $K[b]$ est un K-ev, engendré par la famille $\{b^s, s \in \mathbb{N}\}$.

Soit $b \in L$. On note $K[b] := \{P(b) \mid P \in K[X]\}$: il s'agit du plus petit sous-anneau de L contenant K et b. En particulier, $K[b] \subset K(b)$.

Remarque : $K[b]$ est un K-ev, engendré par la famille $\{b^s, s \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 13

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

IV. Eléments algébriques

Soit $b \in L$. On note $K[b] := \{P(b) \mid P \in K[X]\}$: il s'agit du plus petit sous-anneau de L contenant K et b. En particulier, $K[b] \subset K(b)$.

Remarque : $K[b]$ est un K-ev, engendré par la famille $\{b^s, s \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 13

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. b est algébrique sur K,

IV. Eléments algébriques

Soit $b \in L$. On note $K[b] := \{P(b) \mid P \in K[X]\}$: il s'agit du plus petit sous-anneau de L contenant K et b. En particulier, $K[b] \subset K(b)$.

Remarque : $K[b]$ est un K-ev, engendré par la famille $\{b^s, s \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 13

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. b est algébrique sur K,
2. $\dim_K K[b]$ est finie,

IV. Eléments algébriques

Soit $b \in L$. On note $K[b] := \{P(b) \mid P \in K[X]\}$: il s'agit du plus petit sous-anneau de L contenant K et b. En particulier, $K[b] \subset K(b)$.

Remarque : $K[b]$ est un K-ev, engendré par la famille $\{b^s, s \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 13

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. b est algébrique sur K,
2. $\dim_K K[b]$ est finie,
3. $K[b]$ est un corps,

Soit $b \in L$. On note $K[b] := \{P(b) \mid P \in K[X]\}$: il s'agit du plus petit sous-anneau de L contenant K et b. En particulier, $K[b] \subset K(b)$.

Remarque : $K[b]$ est un K-ev, engendré par la famille $\{b^s, s \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 13

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. b est algébrique sur K,
2. $\dim_K K[b]$ est finie,
3. $K[b]$ est un corps,
4. $K[b] = K(b)$.

IV. Eléments algébriques

Soit $b \in L$. On note $K[b] := \{P(b) \mid P \in K[X]\}$: il s'agit du plus petit sous-anneau de L contenant K et b. En particulier, $K[b] \subset K(b)$.

Remarque : $K[b]$ est un K-ev, engendré par la famille $\{b^s, s \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 13

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. b est algébrique sur K,
2. $\dim_K K[b]$ est finie,
3. $K[b]$ est un corps,
4. $K[b] = K(b)$.

Ainsi, $[K(a) : K]$ est fini

IV. Eléments algébriques

Soit $b \in L$. On note $K[b] := \{P(b) \mid P \in K[X]\}$: il s'agit du plus petit sous-anneau de L contenant K et b. En particulier, $K[b] \subset K(b)$.

Remarque : $K[b]$ est un K-ev, engendré par la famille $\{b^s, s \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 13

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. b est algébrique sur K,
2. $\dim_K K[b]$ est finie,
3. $K[b]$ est un corps,
4. $K[b] = K(b)$.

Ainsi, $[K(a) : K]$ est fini et, si $d := \deg \mu_{a,K}$,

IV. Eléments algébriques

Soit $b \in L$. On note $K[b] := \{P(b) \mid P \in K[X]\}$: il s'agit du plus petit sous-anneau de L contenant K et b. En particulier, $K[b] \subset K(b)$.

Remarque : $K[b]$ est un K-ev, engendré par la famille $\{b^s, s \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 13

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. b est algébrique sur K,
2. $\dim_K K[b]$ est finie,
3. $K[b]$ est un corps,
4. $K[b] = K(b)$.

Ainsi, $[K(a) : K]$ est fini et, si $d := \deg \mu_{a,K}$,

Proposition 14

$[K(a) : K] = d$,

IV. Eléments algébriques

Soit $b \in L$. On note $K[b] := \{P(b) \mid P \in K[X]\}$: il s'agit du plus petit sous-anneau de L contenant K et b. En particulier, $K[b] \subset K(b)$.

Remarque : $K[b]$ est un K-ev, engendré par la famille $\{b^s, s \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 13

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. b est algébrique sur K,
2. $\dim_K K[b]$ est finie,
3. $K[b]$ est un corps,
4. $K[b] = K(b)$.

Ainsi, $[K(a) : K]$ est fini et, si $d := \deg \mu_{a,K}$,

Proposition 14

$[K(a) : K] = d$, et la famille $\mathcal{B} := \{a^s, s \in \{0, \dots, d-1\}\}$ est une K-base de $K(a)$.

V. Extensions algébriques

Définition 15

L'extension L de K est dite <u>algébrique sur K</u> si tout élément de L est algébrique que K.

Définition 15

L'extension L de K est dite algébrique sur K si tout élément de L est algébrique que K.

Exemples :

V. Extensions algébriques

Définition 15

L'extension L de K est dite algébrique sur K si tout élément de L est algébrique que K.

Exemples :

- $\mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$,

Définition 15

L'extension L de K est dite algébrique sur K si tout élément de L est algébrique que K.

Exemples :

- $\mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

V. Extensions algébriques

Définition 15

L'extension L de K est dite algébrique sur K si tout élément de L est algébrique que K.

Exemples :

- $\mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Plus généralement,

V. Extensions algébriques

Définition 15

L'extension L de K est dite <u>algébrique sur K</u> si tout élément de L est algébrique que K.

<u>Exemples :</u>

- $\mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Plus généralement,

Proposition 16

Si L est de degré fini sur K, alors L est algébrique sur K.

V. Extensions algébriques

Définition 15

L'extension L de K est dite algébrique sur K si tout élément de L est algébrique que K.

Exemples :

- $\mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Plus généralement,

Proposition 16

Si L est de degré fini sur K, alors L est algébrique sur K.

Supposons que b est algébrique sur K.

V. Extensions algébriques

Définition 15

L'extension L de K est dite algébrique sur K si tout élément de L est algébrique que K.

Exemples :

- $\mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Plus généralement,

Proposition 16

Si L est de degré fini sur K, alors L est algébrique sur K.

Supposons que b est algébrique sur K.

Proposition 17

L'extension $K(a, b)$ de K est de degré fini,

V. Extensions algébriques

Définition 15

L'extension L de K est dite algébrique sur K si tout élément de L est algébrique que K.

Exemples :

- $\mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Plus généralement,

Proposition 16

Si L est de degré fini sur K, alors L est algébrique sur K.

Supposons que b est algébrique sur K.

Proposition 17

L'extension $K(a, b)$ de K est de degré fini, donc algébrique sur K.

V. Extensions algébriques

Définition 15

L'extension L de K est dite <u>algébrique sur K</u> si tout élément de L est algébrique que K.

<u>Exemples :</u>

- $\mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Plus généralement,

Proposition 16

Si L est de degré fini sur K, alors L est algébrique sur K.

Supposons que b est algébrique sur K.

Proposition 17

L'extension $K(a, b)$ de K est de degré fini, donc algébrique sur K.

<u>Conséquence :</u> $a + b$, ab et, si $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ sont algébriques sur K.

Proposition 18

Soient $\alpha \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Proposition 18

Soient $\alpha \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si α est algébrique sur $\mathbb{Q}$, alors $\sqrt[n]{\alpha}$ est également algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Proposition 18

Soient $\alpha \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si α est algébrique sur $\mathbb{Q}$, alors $\sqrt[n]{\alpha}$ est également algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Conséquence : Tout nombre réel exprimé à l'aide de sommes, différences, produits, quotients, racines n-ièmes, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, de nombres rationnels est algébrique sur $\mathbb{Q}$,

Proposition 18

Soient $\alpha \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si α est algébrique sur $\mathbb{Q}$, alors $\sqrt[n]{\alpha}$ est également algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Conséquence : Tout nombre réel exprimé à l'aide de sommes, différences, produits, quotients, racines n-ièmes, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, de nombres rationnels est algébrique sur $\mathbb{Q}$, comme par exemple

$$\frac{\sqrt{11}}{\sqrt[4]{3}} - \sqrt[186]{\frac{3 - \sqrt[3]{5}}{2 + 4\sqrt{7}}}.$$