Chapitre 1 : Équations non linéaires

I. Introduction

But : Résoudre numériquement l'équation

$$\text{(E)} \quad f(x) = 0, \; x \in I,$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

I. Introduction

<u>But :</u> Résoudre <u>numériquement</u> l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad f(x) = 0, \; x \in I,$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

<u>Précisément :</u>

I. Introduction

<u>But :</u> Résoudre <u>numériquement</u> l'équation

$$\text{(E)} \quad f(x) = 0, \; x \in I,$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

<u>Précisément :</u> Si $\epsilon, \widetilde{\epsilon} \in]0, +\infty[$ sont deux erreurs tolérées prescrites,

I. Introduction

But : Résoudre numériquement l'équation

$$\text{(E)} \quad f(x) = 0, \; x \in I,$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

Précisément : Si $\epsilon, \widetilde{\epsilon} \in]0, +\infty[$ sont deux erreurs tolérées prescrites, si $x \in I$ est une solution de E,

I. Introduction

But : Résoudre numériquement l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad f(x) = 0,\ x \in I,$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

Précisément : Si $\epsilon, \widetilde{\epsilon} \in]0, +\infty[$ sont deux erreurs tolérées prescrites, si $x \in I$ est une solution de E, on souhaite pouvoir construire $x_0 \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \epsilon$ et $|f(x_0)| \leq \widetilde{\epsilon}$.

I. Introduction

<u>But :</u> Résoudre <u>numériquement</u> l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad f(x) = 0, \; x \in I,$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

<u>Précisément :</u> Si $\epsilon, \widetilde{\epsilon} \in]0, +\infty[$ sont deux erreurs tolérées prescrites, si $x \in I$ est une solution de E, on souhaite pouvoir construire $x_0 \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \epsilon$ et $|f(x_0)| \leq \widetilde{\epsilon}$.

<u>Pour cela :</u>

I. Introduction

<u>But :</u> Résoudre <u>numériquement</u> l'équation

$$\text{(E)} \quad f(x) = 0, \; x \in I,$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

<u>Précisément :</u> Si $\epsilon, \widetilde{\epsilon} \in]0, +\infty[$ sont deux erreurs tolérées prescrites, si $x \in I$ est une solution de E, on souhaite pouvoir construire $x_0 \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \epsilon$ et $|f(x_0)| \leq \widetilde{\epsilon}$.

<u>Pour cela :</u> On construit algorithmiquement une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I qui converge vers x.

I. Introduction

Définition 1

Soit $k \in [1, +\infty[$. On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x est

Définition 1

Soit $k \in [1, +\infty[$. On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x est

- linéaire ou d'ordre 1 si

  $$\exists C \in [0; 1[, \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |x_{n+1} - x| \leq C|x_n - x|,$$

I. Introduction

Définition 1

Soit $k \in [1, +\infty[$. On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x est

- linéaire ou d'ordre 1 si

  $$\exists C \in [0; 1[, \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |x_{n+1} - x| \leq C|x_n - x|,$$

- d'ordre $k \in]1, +\infty[$ si

$$\exists C \in [0, +\infty[, \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |x_{n+1} - x| \leq C|x_n - x|^k.$$

Définition 1

Soit $k \in [1, +\infty[$. On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x est

- linéaire ou d'ordre 1 si

  $$\exists C \in [0; 1[, \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |x_{n+1} - x| \leq C|x_n - x|,$$

- d'ordre $k \in]1, +\infty[$ si

$$\exists C \in [0, +\infty[, \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |x_{n+1} - x| \leq C|x_n - x|^k.$$

Remarque : Une convergence d'ordre 2 est dite quadratique.

Définition 1

Soit $k \in [1, +\infty[$. On dit que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x est

- linéaire ou d'ordre 1 si

  $$\exists C \in [0; 1[, \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |x_{n+1} - x| \leq C|x_n - x|,$$

- d'ordre $k \in]1, +\infty[$ si

$$\exists C \in [0, +\infty[, \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |x_{n+1} - x| \leq C|x_n - x|^k.$$

Remarque : Une convergence d'ordre 2 est dite quadratique.

Dans ce chapitre, nous allons donner des algorithmes construisant de tels suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II. Méthode de dichotomie

II. Méthode de dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

II. Méthode de dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. On suppose que $f(a)f(b) < 0$:

II. Méthode de dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. On suppose que $f(a)f(b) < 0$: d'après le TVI, l'équation

$$\text{(E)} \quad f(x) = 0, \; x \in [a, b],$$

possède (au moins) une solution.

Principe de la méthode de dichotomie : On construit une suite de sous-segments $I_n = [u_n, v_n]$, $n \in \mathbb{N}$,

II. Méthode de dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. On suppose que $f(a)f(b) < 0$: d'après le TVI, l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad f(x) = 0, \; x \in [a, b],$$

possède (au moins) une solution.

Principe de la méthode de dichotomie : On construit une suite de sous-segments $I_n = [u_n, v_n]$, $n \in \mathbb{N}$, telle que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers une solution de (E).

II. Méthode de dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. On suppose que $f(a)f(b) < 0$: d'après le TVI, l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad f(x) = 0, \; x \in [a, b],$$

possède (au moins) une solution.

Principe de la méthode de dichotomie : On construit une suite de sous-segments $I_n = [u_n, v_n]$, $n \in \mathbb{N}$, telle que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers une solution de (E).

La construction :

II. Méthode de dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. On suppose que $f(a)f(b) < 0$: d'après le TVI, l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad f(x) = 0, \ x \in [a, b],$$

possède (au moins) une solution.

Principe de la méthode de dichotomie : On construit une suite de sous-segments $I_n = [u_n, v_n]$, $n \in \mathbb{N}$, telle que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers une solution de (E).

La construction :

- on pose $I_0 := [a, b]$,

II. Méthode de dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. On suppose que $f(a)f(b) < 0$: d'après le TVI, l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad f(x) = 0, \ x \in [a, b],$$

possède (au moins) une solution.

Principe de la méthode de dichotomie : On construit une suite de sous-segments $I_n = [u_n, v_n]$, $n \in \mathbb{N}$, telle que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers une solution de (E).

La construction :

- on pose $I_0 := [a, b]$,
- pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose $I_n = [u_n, v_n]$ construit avec $f(u_n)f(v_n) < 0$,

II. Méthode de dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. On suppose que $f(a)f(b) < 0$: d'après le TVI, l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad f(x) = 0, \; x \in [a, b],$$

possède (au moins) une solution.

Principe de la méthode de dichotomie : On construit une suite de sous-segments $I_n = [u_n, v_n]$, $n \in \mathbb{N}$, telle que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers une solution de (E).

La construction :

- on pose $I_0 := [a, b]$,
- pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose $I_n = [u_n, v_n]$ construit avec $f(u_n)f(v_n) < 0$, et on calcule $\alpha_n := \frac{u_n+v_n}{2}$:

II. Méthode de dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. On suppose que $f(a)f(b) < 0$: d'après le TVI, l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad f(x) = 0, \; x \in [a, b],$$

possède (au moins) une solution.

Principe de la méthode de dichotomie : On construit une suite de sous-segments $I_n = [u_n, v_n]$, $n \in \mathbb{N}$, telle que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers une solution de (E).

La construction :

- on pose $I_0 := [a, b]$,
- pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose $I_n = [u_n, v_n]$ construit avec $f(u_n)f(v_n) < 0$, et on calcule $\alpha_n := \frac{u_n+v_n}{2}$: nécessairement $f(\alpha_n) = 0$ ou $f(u_n)f(\alpha_n) < 0$ ou $f(\alpha_n)f(v_n) < 0$,

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. On suppose que $f(a)f(b) < 0$: d'après le TVI, l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad f(x) = 0, \ x \in [a, b],$$

possède (au moins) une solution.

Principe de la méthode de dichotomie : On construit une suite de sous-segments $I_n = [u_n, v_n]$, $n \in \mathbb{N}$, telle que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers une solution de (E).

La construction :

- on pose $I_0 := [a, b]$,
- pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose $I_n = [u_n, v_n]$ construit avec $f(u_n)f(v_n) < 0$, et on calcule $\alpha_n := \frac{u_n+v_n}{2}$: nécessairement $f(\alpha_n) = 0$ ou $f(u_n)f(\alpha_n) < 0$ ou $f(\alpha_n)f(v_n) < 0$,
  - si $f(\alpha_n) = 0$, on retourne α_n,

II. Méthode de dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. On suppose que $f(a)f(b) < 0$: d'après le TVI, l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad f(x) = 0, \ x \in [a, b],$$

possède (au moins) une solution.

Principe de la méthode de dichotomie : On construit une suite de sous-segments $I_n = [u_n, v_n]$, $n \in \mathbb{N}$, telle que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers une solution de (E).

La construction :

- on pose $I_0 := [a, b]$,
- pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose $I_n = [u_n, v_n]$ construit avec $f(u_n)f(v_n) < 0$, et on calcule $\alpha_n := \frac{u_n+v_n}{2}$: nécessairement $f(\alpha_n) = 0$ ou $f(u_n)f(\alpha_n) < 0$ ou $f(\alpha_n)f(v_n) < 0$,
  - si $f(\alpha_n) = 0$, on retourne α_n,
  - si $f(u_n)f(\alpha_n) < 0$, on pose $I_{n+1} := [u_n, \alpha_n]$,

II. Méthode de dichotomie

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. On suppose que $f(a)f(b) < 0$: d'après le TVI, l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad f(x) = 0, \ x \in [a, b],$$

possède (au moins) une solution.

Principe de la méthode de dichotomie : On construit une suite de sous-segments $I_n = [u_n, v_n]$, $n \in \mathbb{N}$, telle que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers une solution de (E).

La construction :

- on pose $I_0 := [a, b]$,
- pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose $I_n = [u_n, v_n]$ construit avec $f(u_n)f(v_n) < 0$, et on calcule $\alpha_n := \frac{u_n+v_n}{2}$: nécessairement $f(\alpha_n) = 0$ ou $f(u_n)f(\alpha_n) < 0$ ou $f(\alpha_n)f(v_n) < 0$,
  - si $f(\alpha_n) = 0$, on retourne α_n,
  - si $f(u_n)f(\alpha_n) < 0$, on pose $I_{n+1} := [u_n, \alpha_n]$,
  - si $f(\alpha_n)f(v_n) < 0$, on pose $I_{n+1} := [\alpha_n, v_n]$.

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_n) \neq 0$, et soit $\epsilon \in [0; +\infty[$. Alors :

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_n) \neq 0$, et soit $\epsilon \in [0; +\infty[$. Alors :

Proposition 2

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un zéro x_0 de f.

II. Méthode de dichotomie

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_n) \neq 0$, et soit $\epsilon \in [0; +\infty[$. Alors :

Proposition 2

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un zéro x_0 de f. De plus, si, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \epsilon$,

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_n) \neq 0$, et soit $\epsilon \in [0; +\infty[$. Alors :

Proposition 2

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un zéro x_0 de f. De plus, si, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \epsilon$, alors $|u_n - x_0| \leq \epsilon$ et $|v_n - x_0| \leq \epsilon$.

II. Méthode de dichotomie

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_n) \neq 0$, et soit $\epsilon \in [0; +\infty[$. Alors :

Proposition 2

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un zéro x_0 de f. De plus, si, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \epsilon$, alors $|u_n - x_0| \leq \epsilon$ et $|v_n - x_0| \leq \epsilon$.

La condition $v_n - u_n \leq \epsilon$ pour $n \in \mathbb{N}$ constitue ainsi une condition d'arrêt pour la méthode de dichotomie,

II. Méthode de dichotomie

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_n) \neq 0$, et soit $\epsilon \in [0; +\infty[$. Alors :

Proposition 2

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un zéro x_0 de f. De plus, si, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \epsilon$, alors $|u_n - x_0| \leq \epsilon$ et $|v_n - x_0| \leq \epsilon$.

La condition $v_n - u_n \leq \epsilon$ pour $n \in \mathbb{N}$ constitue ainsi une condition d'arrêt pour la méthode de dichotomie, et :

Proposition 3

La convergence de la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire.

II. Méthode de dichotomie

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_n) \neq 0$, et soit $\epsilon \in [0; +\infty[$. Alors :

Proposition 2

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un zéro x_0 de f. De plus, si, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \epsilon$, alors $|u_n - x_0| \leq \epsilon$ et $|v_n - x_0| \leq \epsilon$.

La condition $v_n - u_n \leq \epsilon$ pour $n \in \mathbb{N}$ constitue ainsi une condition d'arrêt pour la méthode de dichotomie, et :

Proposition 3

La convergence de la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire.

Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n = \frac{b-a}{2^n}$

II. Méthode de dichotomie

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_n) \neq 0$, et soit $\epsilon \in [0; +\infty[$. Alors :

Proposition 2

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un zéro x_0 de f. De plus, si, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \epsilon$, alors $|u_n - x_0| \leq \epsilon$ et $|v_n - x_0| \leq \epsilon$.

La condition $v_n - u_n \leq \epsilon$ pour $n \in \mathbb{N}$ constitue ainsi une condition d'arrêt pour la méthode de dichotomie, et :

Proposition 3

La convergence de la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire.

Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n = \frac{b-a}{2^n}$ donc on connaît le nombre maximum d'étapes $N \in \mathbb{N}$ pour que $v_N - u_N = \frac{b-a}{2^N} \leq \epsilon$.

II. Méthode de dichotomie

Soient $\widetilde{\epsilon} \in]0, +\infty[$. L'algorithme de dichotomie pour déterminer un zéro de f sur $[a, b]$ aux erreurs $\epsilon, \widetilde{\epsilon}$ près est :

II. Méthode de dichotomie

Soient $\widetilde{\epsilon} \in]0, +\infty[$. L'algorithme de dichotomie pour déterminer un zéro de f sur $[a, b]$ aux erreurs $\epsilon, \widetilde{\epsilon}$ près est :

$u \leftarrow a$
$v \leftarrow b$
$\alpha \leftarrow u$
while $v - u > \epsilon$ ou $|f(u)| > \widetilde{\epsilon}$ ou $|f(v)| > \widetilde{\epsilon}$ **do**
    $\alpha \leftarrow \frac{u+v}{2}$
    if $f(\alpha) = 0$ **then**
        Return α
        Stop
    else
        if $f(u)f(\alpha) < 0$ **then**
            $v \leftarrow \alpha$
        else
            $u \leftarrow \alpha$
        end if
    end if
end while
Return u (ou v)

III. Méthode du point fixe

III. Méthode du point fixe

On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$,

III. Méthode du point fixe

On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que, si $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$ ssi $g(x) = x$

III. Méthode du point fixe

On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que, si $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$ ssi $g(x) = x$ ssi x est un <u>point fixe de g</u>.

III. Méthode du point fixe

On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que, si $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$ ssi $g(x) = x$ ssi x est un point fixe de g.

Exemples

- $g : x \mapsto f(x) + x$,
- $g : x \mapsto x - f(x)$,
- $g : x \mapsto \lambda f(x) + x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$,
- $\ldots$

III. Méthode du point fixe

On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que, si $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$ ssi $g(x) = x$ ssi x est un <u>point fixe de g</u>.

Exemples

- $g : x \mapsto f(x) + x$,
- $g : x \mapsto x - f(x)$,
- $g : x \mapsto \lambda f(x) + x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$,
- ...

On suppose de plus que

III. Méthode du point fixe

On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que, si $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$ ssi $g(x) = x$ ssi x est un point fixe de g.

Exemples

- $g : x \mapsto f(x) + x$,
- $g : x \mapsto x - f(x)$,
- $g : x \mapsto \lambda f(x) + x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$,
- $\ldots$

On suppose de plus que

- g est de classe $\mathcal{C}^1$,

III. Méthode du point fixe

On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que, si $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$ ssi $g(x) = x$ ssi x est un point fixe de g.

Exemples

- $g : x \mapsto f(x) + x$,
- $g : x \mapsto x - f(x)$,
- $g : x \mapsto \lambda f(x) + x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$,
- $\ldots$

On suppose de plus que

- g est de classe $\mathcal{C}^1$,
- $g([a, b]) \subset [a, b]$,

III. Méthode du point fixe

On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que, si $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$ ssi $g(x) = x$ ssi x est un point fixe de g.

Exemples

- $g : x \mapsto f(x) + x$,
- $g : x \mapsto x - f(x)$,
- $g : x \mapsto \lambda f(x) + x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$,
- $\ldots$

On suppose de plus que

- g est de classe $\mathcal{C}^1$,
- $g([a, b]) \subset [a, b]$,
- $K := \max\limits_{x \in [a,b]} |g'(x)| < 1$.

Alors

Théorème 4

g possède un unique point fixe y dans $[a, b]$

Alors

Théorème 4

g possède un unique point fixe y dans $[a, b]$ (i.e. f possède un unique zéro y dans $[a, b]$).

Alors

Théorème 4

g possède un unique point fixe y dans $[a, b]$ (i.e. f possède un unique zéro y dans $[a, b]$).
De plus, si $y_0 \in [a, b]$ et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} x_0 := y_0, \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} := g(x_n), \end{cases}$$

alors

Alors

Théorème 4

g possède un unique point fixe y dans $[a, b]$ (i.e. f possède un unique zéro y dans $[a, b]$).
De plus, si $y_0 \in [a, b]$ et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} x_0 := y_0, \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} := g(x_n), \end{cases}$$

alors

- la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - y| \leq K|x_n - y|$.

Alors

Théorème 4

g possède un unique point fixe y dans $[a, b]$ (i.e. f possède un unique zéro y dans $[a, b]$).
De plus, si $y_0 \in [a, b]$ et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} x_0 := y_0, \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} := g(x_n), \end{cases}$$

alors

- la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - y| \leq K|x_n - y|$.

<u>Remarque :</u> La convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers y est linéaire.

III. Méthode du point fixe

Principe :

III. Méthode du point fixe

Principe : Lorsque les hypothèses du théorème sont vérifiées,

III. Méthode du point fixe

Principe : Lorsque les hypothèses du théorème sont vérifiées, on choisit $y_0 \in [a, b]$, puis on calcule les itérés de y_0 par g.

III. Méthode du point fixe

Principe : Lorsque les hypothèses du théorème sont vérifiées, on choisit $y_0 \in [a, b]$, puis on calcule les itérés de y_0 par g.

Une condition d'arrêt de la méthode est inspirée par :

Principe : Lorsque les hypothèses du théorème sont vérifiées, on choisit $y_0 \in [a, b]$, puis on calcule les itérés de y_0 par g.

Une condition d'arrêt de la méthode est inspirée par :

Proposition 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - y| \leq \frac{1}{1-K}|x_{n+1} - x_n|$.

III. Méthode du point fixe

Principe : Lorsque les hypothèses du théorème sont vérifiées, on choisit $y_0 \in [a, b]$, puis on calcule les itérés de y_0 par g.

Une condition d'arrêt de la méthode est inspirée par :

Proposition 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - y| \leq \frac{1}{1-K}|x_{n+1} - x_n|$.

Conséquence : Si $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$ pour $n \in \mathbb{N}$,

III. Méthode du point fixe

Principe : Lorsque les hypothèses du théorème sont vérifiées, on choisit $y_0 \in [a, b]$, puis on calcule les itérés de y_0 par g.

Une condition d'arrêt de la méthode est inspirée par :

Proposition 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - y| \leq \frac{1}{1-K}|x_{n+1} - x_n|$.

Conséquence : Si $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $|x_n - y| \leq \frac{\epsilon}{1-K}$

III. Méthode du point fixe

Principe : Lorsque les hypothèses du théorème sont vérifiées, on choisit $y_0 \in [a, b]$, puis on calcule les itérés de y_0 par g.

Une condition d'arrêt de la méthode est inspirée par :

Proposition 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - y| \leq \frac{1}{1-K}|x_{n+1} - x_n|$.

Conséquence : Si $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $|x_n - y| \leq \frac{\epsilon}{1-K}$ (si K est "proche" de 1, il faut prendre ϵ "petit").

III. Méthode du point fixe

Principe : Lorsque les hypothèses du théorème sont vérifiées, on choisit $y_0 \in [a, b]$, puis on calcule les itérés de y_0 par g.

Une condition d'arrêt de la méthode est inspirée par :

Proposition 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - y| \leq \frac{1}{1-K}|x_{n+1} - x_n|$.

Conséquence : Si $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $|x_n - y| \leq \frac{\epsilon}{1-K}$ (si K est "proche" de 1, il faut prendre ϵ "petit").

L'algorithme :

$x \leftarrow y_0$
$\widetilde{x} \leftarrow g(x)$
while $|\widetilde{x} - x| > \epsilon$ ou $|f(x)| > \widetilde{\epsilon}$ **do**
    $x \leftarrow \widetilde{x}$
    $\widetilde{x} \leftarrow g(x)$
end while
Return x

IV. Méthode de Newton

IV. Méthode de Newton

On suppose que

IV. Méthode de Newton

On suppose que

- il existe $y \in [a, b]$ tel que $f(y) = 0$,

IV. Méthode de Newton

On suppose que

- il existe $y \in [a, b]$ tel que $f(y) = 0$,
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$,

On suppose que

- il existe $y \in [a, b]$ tel que $f(y) = 0$,
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$,
- f' ne s'annule pas sur $[a, b]$.

IV. Méthode de Newton

On suppose que

- il existe $y \in [a, b]$ tel que $f(y) = 0$,
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$,
- f' ne s'annule pas sur $[a, b]$.

On considère alors la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array},$$

IV. Méthode de Newton

On suppose que

- il existe $y \in [a, b]$ tel que $f(y) = 0$,
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$,
- f' ne s'annule pas sur $[a, b]$.

On considère alors la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array},$$

et on remarque que, si $x \in [a, b]$,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x.$$

IV. Méthode de Newton

On suppose que

- il existe $y \in [a, b]$ tel que $f(y) = 0$,
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$,
- f' ne s'annule pas sur $[a, b]$.

On considère alors la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array},$$

et on remarque que, si $x \in [a, b]$,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x.$$

Principe de la méthode de Newton : on cherche à appliquer la méthode du point fixe à g

IV. Méthode de Newton

On suppose que

- il existe $y \in [a, b]$ tel que $f(y) = 0$,
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$,
- f' ne s'annule pas sur $[a, b]$.

On considère alors la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array},$$

et on remarque que, si $x \in [a, b]$,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x.$$

<u>Principe de la méthode de Newton :</u> on cherche à appliquer la méthode du point fixe à g i.e. on cherche un segment $I \subset [a, b]$ tel que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} := g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{cases}$$

converge vers y.

Proposition 6

Il existe $\delta \in]0, +\infty[$ tel que, si $x_0 \in [y - \delta, y + \delta]$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y.

Proposition 6

Il existe $\delta \in]0, +\infty[$ tel que, si $x_0 \in [y - \delta, y + \delta]$, alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y.

Un inconvénient de la méthode : il faut choisir un point x_0 "suffisamment proche" de y.

Proposition 6

Il existe $\delta \in]0, +\infty[$ tel que, si $x_0 \in [y - \delta, y + \delta]$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y.

Un inconvénient de la méthode : il faut choisir un point x_0 "suffisamment proche" de y.

Un avantage : quand il y a convergence, elle est quadratique :

IV. Méthode de Newton

Proposition 6

Il existe $\delta \in]0, +\infty[$ tel que, si $x_0 \in [y - \delta, y + \delta]$, alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y.

Un inconvénient de la méthode : il faut choisir un point x_0 "suffisamment proche" de y.

Un avantage : quand il y a convergence, elle est quadratique :

Théorème 7

$\exists C \in [0, +\infty[, \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |x_{n+1} - y| \leq C|x_n - y|^2.$

V. Méthode de la sécante

V. Méthode de la sécante

Un autre inconvénient de la méthode de Newton : une évaluation de f' à chaque étape.

Principe de la méthode de la sécante :

V. Méthode de la sécante

Un autre inconvénient de la méthode de Newton : une évaluation de f' à chaque étape.

Principe de la méthode de la sécante : sous les mêmes hypothèses que la méthode de Newton,

V. Méthode de la sécante

Un autre inconvénient de la méthode de Newton : une évaluation de f' à chaque étape.

Principe de la méthode de la sécante : sous les mêmes hypothèses que la méthode de Newton, on cherche un segment $I \subset [a, b]$ tel que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

V. Méthode de la sécante

Un autre inconvénient de la méthode de Newton : une évaluation de f' à chaque étape.

Principe de la méthode de la sécante : sous les mêmes hypothèses que la méthode de Newton, on cherche un segment $I \subset [a, b]$ tel que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\begin{cases} x_0 \in I, \\ x_1 \in I, \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x_{n+1} := x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \end{cases}$$

V. Méthode de la sécante

Un autre inconvénient de la méthode de Newton : une évaluation de f' à chaque étape.

Principe de la méthode de la sécante : sous les mêmes hypothèses que la méthode de Newton, on cherche un segment $I \subset [a, b]$ tel que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\begin{cases} x_0 \in I, \\ x_1 \in I, \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x_{n+1} := x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \end{cases}$$

soit bien définie et converge vers y.

V. Méthode de la sécante

Un autre inconvénient de la méthode de Newton : une évaluation de f' à chaque étape.

Principe de la méthode de la sécante : sous les mêmes hypothèses que la méthode de Newton, on cherche un segment $I \subset [a, b]$ tel que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\begin{cases} x_0 \in I, \\ x_1 \in I, \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x_{n+1} := x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \end{cases}$$

soit bien définie et converge vers y.

Théorème 8

Il existe $\delta \in]0, +\infty[$ tel que, si $x_0, x_1 \in [y-\delta, y+\delta]$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et converge vers y.

V. Méthode de la sécante

Un autre inconvénient de la méthode de Newton : une évaluation de f' à chaque étape.

Principe de la méthode de la sécante : sous les mêmes hypothèses que la méthode de Newton, on cherche un segment $I \subset [a, b]$ tel que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\begin{cases} x_0 \in I, \\ x_1 \in I, \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x_{n+1} := x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \end{cases}$$

soit bien définie et converge vers y.

Théorème 8

Il existe $\delta \in]0, +\infty[$ tel que, si $x_0, x_1 \in [y - \delta, y + \delta]$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et converge vers y. L'ordre de cette convergence est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.