Chapitre 4 : Courbes paramétrées

I. Introduction

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On considère $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne

$$\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & [0;+\infty[\\ (x_1,\ldots,x_d) & \mapsto & \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{d} x_i^2} \end{array}$$

I. Introduction

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On considère $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne

$$\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & [0;+\infty[\\ (x_1,\ldots,x_d) & \mapsto & \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{d} x_i^2} \end{array}$$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & f(t) = (f_1(t),\ldots,f_d(t)) \end{array}$$

une *fonction vectorielle*.

I. Introduction

$$f : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & f(t) = (f_1(t), \ldots, f_d(t)) \end{array}$$

On dit que f est

I. Introduction

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & f(t) = (f_1(t), \dots, f_d(t)) \end{array}$$

On dit que f est

- <u>dérivable</u> si les fonctions $f_1, \dots, f_d$ sont dérivables,

I. Introduction

$$f: \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & f(t) = (f_1(t), \dots, f_d(t)) \end{array}$$

On dit que f est

- dérivable si les fonctions $f_1, \dots, f_d$ sont dérivables, et dans ce cas on note

$$f': \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & (f_1'(t), \dots, f_d'(t)) \end{array}$$

I. Introduction

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & f(t) = (f_1(t), \ldots, f_d(t)) \end{array}$$

On dit que f est

- dérivable si les fonctions $f_1, \ldots, f_d$ sont dérivables, et dans ce cas on note

  $$f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & (f_1'(t), \ldots, f_d'(t)) \end{array}$$

  et on a, pour tout $t \in I$,

  $$\frac{1}{h}\big(f(t+h) - f(t)\big) \xrightarrow[h \to 0]{} f'(t),$$

I. Introduction

$$f: \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & f(t) = (f_1(t), \ldots, f_d(t)) \end{array}$$

On dit que f est

- dérivable si les fonctions $f_1, \ldots, f_d$ sont dérivables, et dans ce cas on note
$$f': \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & (f_1'(t), \ldots, f_d'(t)) \end{array}$$
et on a, pour tout $t \in I$,
$$\frac{1}{h}\big(f(t+h) - f(t)\big) \xrightarrow[h \to 0]{} f'(t),$$
- de classe $\mathcal{C}^k$ si $f_1, \ldots, f_d \in \mathcal{C}^k(I)$.

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & f(t) = (f_1(t), \ldots, f_d(t)) \end{array}$$

Si $I = [a, b]$,

I. Introduction

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & f(t) = (f_1(t), \dots, f_d(t)) \end{array}$$

Si $I = [a, b]$, on dit que f est <u>Riemann-intégrable</u> sur $[a, b]$ si $f_1, \dots, f_d \in \mathcal{RI}([a, b])$.

$$f: \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & f(t) = (f_1(t), \ldots, f_d(t)) \end{array}$$

Si $I = [a, b]$, on dit que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si $f_1, \ldots, f_d \in \mathcal{RI}([a, b])$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t := \left(\int_a^b f_1(t)\mathrm{d}t, \ldots, \int_a^b f_d(t)\mathrm{d}t \right)$$

I. Introduction

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto & f(t) = (f_1(t), \ldots, f_d(t)) \end{array}$$

Si $I = [a, b]$, on dit que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si $f_1, \ldots, f_d \in \mathcal{RI}([a, b])$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t := \left(\int_a^b f_1(t)\mathrm{d}t, \ldots, \int_a^b f_d(t)\mathrm{d}t \right)$$

et on a

$$\left\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

II. Notion de courbe paramétrée

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

II. Notion de courbe paramétrée

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition 1

Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$

II. Notion de courbe paramétrée

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition 1

Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ est une fonction vectorielle

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^d$$

de classe $\mathcal{C}^k$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

II. Notion de courbe paramétrée

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition 1

Une <u>courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$</u> est une fonction vectorielle

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^d$$

de classe $\mathcal{C}^k$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$.

II. Notion de courbe paramétrée

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition 1

Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ est une fonction vectorielle

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^d$$

de classe $\mathcal{C}^k$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 2

Le support de γ (ou courbe associée à γ) est l'image

$$\mathcal{C}_\gamma := \{\gamma(t) \mid t \in I\}$$

de I par γ,

II. Notion de courbe paramétrée

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition 1

Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ est une fonction vectorielle

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^d$$

de classe $\mathcal{C}^k$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 2

Le support de γ (ou courbe associée à γ) est l'image

$$\mathcal{C}_\gamma := \{\gamma(t) \mid t \in I\}$$

de I par γ, et on dit que γ est une paramétrisation de C_γ.

II. Notion de courbe paramétrée

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition 1

Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ est une fonction vectorielle

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^d$$

de classe $\mathcal{C}^k$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 2

Le support de γ (ou courbe associée à γ) est l'image

$$\mathcal{C}_\gamma := \{\gamma(t) \mid t \in I\}$$

de I par γ, et on dit que γ est une paramétrisation de C_γ.

Remarques : • Attention de ne pas confondre γ et C_γ !

II. Notion de courbe paramétrée

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition 1

Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ est une fonction vectorielle

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^d$$

de classe $\mathcal{C}^k$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 2

Le support de γ (ou courbe associée à γ) est l'image

$$\mathcal{C}_\gamma := \{\gamma(t) \mid t \in I\}$$

de I par γ, et on dit que γ est une paramétrisation de C_γ.

Remarques : • Attention de ne pas confondre γ et C_γ !
• Deux courbes paramétrées différentes peuvent avoir le même support.

II. Notion de courbe paramétrée

Soit $\eta : J \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$.

II. Notion de courbe paramétrée

Soit $\eta : J \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 3

On dit que γ est $\underline{\mathcal{C}^k\text{-équivalente}}$ à η

II. Notion de courbe paramétrée

Soit $\eta : J \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 3

On dit que γ est $\mathcal{C}^k$-équivalente à η s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\sigma : J \to I$

Soit $\eta : J \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 3

On dit que γ est $\mathcal{C}^k$-équivalente à η s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\sigma : J \to I$ tel que

$$\gamma \circ \sigma = \eta.$$

Soit $\eta : J \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 3

On dit que γ est $\mathcal{C}^k$-équivalente à η s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\sigma : J \to I$ tel que

$$\gamma \circ \sigma = \eta.$$

Dans ce cas, on dit que η est une reparamétrisation de classe $\mathcal{C}^k$ de C_γ.

Soit $\eta : J \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 3

On dit que γ est <u>$\mathcal{C}^k$-équivalente</u> à η s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\sigma : J \to I$ tel que

$$\gamma \circ \sigma = \eta.$$

Dans ce cas, on dit que η est une <u>reparamétrisation de classe $\mathcal{C}^k$</u> de C_γ.

Notons $\gamma \sim_k \eta$ si γ est $\mathcal{C}^k$-équivalente à η.

II. Notion de courbe paramétrée

Soit $\eta : J \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 3

On dit que γ est $\mathcal{C}^k$-équivalente à η s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\sigma : J \to I$ tel que

$$\gamma \circ \sigma = \eta.$$

Dans ce cas, on dit que η est une reparamétrisation de classe $\mathcal{C}^k$ de C_γ.

Notons $\gamma \sim_k \eta$ si γ est $\mathcal{C}^k$-équivalente à η. Alors :

Soit $\eta : J \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 3

On dit que γ est $\mathcal{C}^k$-équivalente à η s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\sigma : J \to I$ tel que

$$\gamma \circ \sigma = \eta.$$

Dans ce cas, on dit que η est une reparamétrisation de classe $\mathcal{C}^k$ de C_γ.

Notons $\gamma \sim_k \eta$ si γ est $\mathcal{C}^k$-équivalente à η. Alors :

Lemme 4

$\sim_k$ est une relation d'équivalence.

Soit $t_0 \in I$ et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $t_0 \in I$ et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition 5

On dit que le point $\gamma(t_0)$ de C_γ (paramétrée par γ)

Soit $t_0 \in I$ et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition 5

On dit que le point $\gamma(t_0)$ de C_γ (paramétrée par γ) est de multiplicité m

III. Multiplicité et simplicité

Soit $t_0 \in I$ et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition 5

On dit que le point $\gamma(t_0)$ de C_γ (paramétrée par γ) est de multiplicité m si

$$\mathrm{Card}\,\{t \in I \mid \gamma(t) = \gamma(t_0)\} = m.$$

III. Multiplicité et simplicité

Soit $t_0 \in I$ et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition 5

On dit que le point $\gamma(t_0)$ de C_γ (paramétrée par γ) est de multiplicité m si

$$\mathrm{Card}\,\{t \in I \mid \gamma(t) = \gamma(t_0)\} = m.$$

Si l'ensemble $\gamma^{-1}(\{t_0\})$ n'est pas fini, on dit que $\gamma(t_0)$ est de multiplicité infinie.

III. Multiplicité et simplicité

Soit $t_0 \in I$ et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition 5

On dit que le point $\gamma(t_0)$ de C_γ (paramétrée par γ) est de multiplicité m si

$$\operatorname{Card}\{t \in I \mid \gamma(t) = \gamma(t_0)\} = m.$$

Si l'ensemble $\gamma^{-1}(\{t_0\})$ n'est pas fini, on dit que $\gamma(t_0)$ est de multiplicité infinie.

Remarque : Un point de multiplicité 1 est dit simple.

III. Multiplicité et simplicité

Soit $t_0 \in I$ et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition 5

On dit que le point $\gamma(t_0)$ de C_γ (paramétrée par γ) est de multiplicité m si

$$\mathrm{Card}\,\{t \in I \mid \gamma(t) = \gamma(t_0)\} = m.$$

Si l'ensemble $\gamma^{-1}(\{t_0\})$ n'est pas fini, on dit que $\gamma(t_0)$ est de multiplicité infinie.

Remarque : Un point de multiplicité 1 est dit simple.

Définition 6

On dit que γ est simple si pour tout $t \in I$, $\gamma(t)$ est simple.

III. Multiplicité et simplicité

Soit $t_0 \in I$ et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition 5

On dit que le point $\gamma(t_0)$ de C_γ (paramétrée par γ) est de multiplicité m si

$$\operatorname{Card}\{t \in I \mid \gamma(t) = \gamma(t_0)\} = m.$$

Si l'ensemble $\gamma^{-1}(\{t_0\})$ n'est pas fini, on dit que $\gamma(t_0)$ est de multiplicité infinie.

Remarque : Un point de multiplicité 1 est dit simple.

Définition 6

On dit que γ est simple si pour tout $t \in I$, $\gamma(t)$ est simple.

Exemple : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$,

III. Multiplicité et simplicité

Soit $t_0 \in I$ et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition 5

On dit que le point $\gamma(t_0)$ de C_γ (paramétrée par γ) est de multiplicité m si

$$\mathrm{Card}\,\{t \in I \mid \gamma(t) = \gamma(t_0)\} = m.$$

Si l'ensemble $\gamma^{-1}(\{t_0\})$ n'est pas fini, on dit que $\gamma(t_0)$ est de multiplicité infinie.

Remarque : Un point de multiplicité 1 est dit simple.

Définition 6

On dit que γ est simple si pour tout $t \in I$, $\gamma(t)$ est simple.

Exemple : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, la courbe paramétrée $I \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto (t, f(t))$ de classe $\mathcal{C}^k$ est simple.

III. Multiplicité et simplicité

Soit $t_0 \in I$ et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition 5

On dit que le point $\gamma(t_0)$ de C_γ (paramétrée par γ) est de multiplicité m si

$$\mathrm{Card}\,\{t \in I \mid \gamma(t) = \gamma(t_0)\} = m.$$

Si l'ensemble $\gamma^{-1}(\{t_0\})$ n'est pas fini, on dit que $\gamma(t_0)$ est de multiplicité infinie.

Remarque : Un point de multiplicité 1 est dit simple.

Définition 6

On dit que γ est simple si pour tout $t \in I$, $\gamma(t)$ est simple.

Exemple : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, la courbe paramétrée $I \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto (t, f(t))$ de classe $\mathcal{C}^k$ est simple.

Lemme 7

La multiplicité est "invariante" sous $\sim_k$.

IV. Tangence

On suppose qu'il existe un intervalle ouvert $\widetilde{I}$ tel que $t_0 \in \widetilde{I}$ et $\gamma(t_0)$ est un point simple de $C_{|I\cap\widetilde{I}}$.

IV. Tangence

On suppose qu'il existe un intervalle ouvert $\widetilde{I}$ tel que $t_0 \in \widetilde{I}$ et $\gamma(t_0)$ est un point simple de $C_{|I\cap\widetilde{I}}$.

Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$.

IV. Tangence

On suppose qu'il existe un intervalle ouvert $\widetilde{I}$ tel que $t_0 \in \widetilde{I}$ et $\gamma(t_0)$ est un point simple de $C_{|I\cap\widetilde{I}}$.
Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$.

Définition 8

On dit que v est <u>tangent à γ en t_0</u>

IV. Tangence

On suppose qu'il existe un intervalle ouvert $\widetilde{I}$ tel que $t_0 \in \widetilde{I}$ et $\gamma(t_0)$ est un point simple de $C_{|I \cap \widetilde{I}}$.

Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$.

Définition 8

On dit que v est <u>tangent à γ en t_0</u> si

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} \xrightarrow[t \to t_0, t < t_0]{} \pm \frac{v}{\|v\|} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} \xrightarrow[t \to t_0, t > t_0]{} \pm \frac{v}{\|v\|}.$$

On suppose qu'il existe un intervalle ouvert $\widetilde{I}$ tel que $t_0 \in \widetilde{I}$ et $\gamma(t_0)$ est un point simple de $C_{|I \cap \widetilde{I}}$.

Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$.

Définition 8

On dit que v est <u>tangent à γ en t_0</u> si

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} \xrightarrow[t \to t_0, t < t_0]{} \pm \frac{v}{\|v\|} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} \xrightarrow[t \to t_0, t > t_0]{} \pm \frac{v}{\|v\|}.$$

<u>Remarque :</u> Deux vecteurs tangents à γ en t_0 sont colinéaires.

IV. Tangence

On suppose qu'il existe un intervalle ouvert $\widetilde{I}$ tel que $t_0 \in \widetilde{I}$ et $\gamma(t_0)$ est un point simple de $C_{|I\cap\widetilde{I}}$.

Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$.

Définition 8

On dit que v est <u>tangent à γ en t_0</u> si

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|} \xrightarrow[t\to t_0,\, t<t_0]{} \pm\frac{v}{\|v\|} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|} \xrightarrow[t\to t_0,\, t>t_0]{} \pm\frac{v}{\|v\|}.$$

<u>Remarque :</u> Deux vecteurs tangents à γ en t_0 sont colinéaires.

Conséquence

Si v est tangent à γ en t_0,

IV. Tangence

On suppose qu'il existe un intervalle ouvert $\widetilde{I}$ tel que $t_0 \in \widetilde{I}$ et $\gamma(t_0)$ est un point simple de $C_{|I\cap\widetilde{I}}$.

Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$.

Définition 8

On dit que v est tangent à γ en t_0 si

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|} \xrightarrow[t\to t_0,\,t<t_0]{} \pm\frac{v}{\|v\|} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|} \xrightarrow[t\to t_0,\,t>t_0]{} \pm\frac{v}{\|v\|}.$$

Remarque : Deux vecteurs tangents à γ en t_0 sont colinéaires.

Conséquence

Si v est tangent à γ en t_0, on peut définir la droite tangente à γ en t_0

IV. Tangence

On suppose qu'il existe un intervalle ouvert $\widetilde{I}$ tel que $t_0 \in \widetilde{I}$ et $\gamma(t_0)$ est un point simple de $C_{|I\cap\widetilde{I}}$.
Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$.

Définition 8

On dit que v est tangent à γ en t_0 si

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|} \xrightarrow[t\to t_0, t<t_0]{} \pm\frac{v}{\|v\|} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|} \xrightarrow[t\to t_0, t>t_0]{} \pm\frac{v}{\|v\|}.$$

Remarque : Deux vecteurs tangents à γ en t_0 sont colinéaires.

Conséquence

Si v est tangent à γ en t_0, on peut définir la droite tangente à γ en t_0 comme étant la droite affine de $\mathbb{R}^d$ de vecteur directeur v et passant par $\gamma(t_0)$.

IV. Tangence

On suppose que γ est dérivable en t_0.

IV. Tangence

On suppose que γ est dérivable en t_0.

Proposition 9

Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$,

On suppose que γ est dérivable en t_0.

Proposition 9

Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à γ en t_0.

IV. Tangence

On suppose que γ est dérivable en t_0.

Proposition 9

Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à γ en t_0.

Remarque : Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$,

IV. Tangence

On suppose que γ est dérivable en t_0.

Proposition 9

Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à γ en t_0.

<u>Remarque :</u> Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, $\frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$ est la "direction instantanée" en t_0,

On suppose que γ est dérivable en t_0.

Proposition 9

Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à γ en t_0.

<u>Remarque :</u> Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, $\frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$ est la “direction instantanée” en t_0, et $\|\gamma'(t_0)\|$ est la “vitesse instantanée” en t_0.

On suppose que γ est dérivable en t_0.

Proposition 9

Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à γ en t_0.

Remarque : Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, $\frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$ est la "direction instantanée" en t_0, et $\|\gamma'(t_0)\|$ est la "vitesse instantanée" en t_0.

Définition 10

- Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, on dit que γ est régulière en t_0.

On suppose que γ est dérivable en t_0.

Proposition 9

Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à γ en t_0.

Remarque : Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, $\frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$ est la "direction instantanée" en t_0, et $\|\gamma'(t_0)\|$ est la "vitesse instantanée" en t_0.

Définition 10

- Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, on dit que γ est régulière en t_0.
- Si $\gamma'(t_0) = \overrightarrow{0}$, on dit que γ est singulière en t_0.

IV. Tangence

On suppose que γ est dérivable en t_0.

Proposition 9

Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à γ en t_0.

Remarque : Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, $\frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$ est la "direction instantanée" en t_0, et $\|\gamma'(t_0)\|$ est la "vitesse instantanée" en t_0.

Définition 10

- Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, on dit que γ est régulière en t_0.
- Si $\gamma'(t_0) = \overrightarrow{0}$, on dit que γ est singulière en t_0.
- Si γ est régulière en tout point de I, on dit que γ est régulière.

IV. Tangence

On suppose que γ est dérivable en t_0.

Proposition 9

Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à γ en t_0.

Remarque : Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, $\frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$ est la “direction instantanée” en t_0, et $\|\gamma'(t_0)\|$ est la “vitesse instantanée” en t_0.

Définition 10

- Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, on dit que γ est régulière en t_0.
- Si $\gamma'(t_0) = \overrightarrow{0}$, on dit que γ est singulière en t_0.
- Si γ est régulière en tout point de I, on dit que γ est régulière.

Remarque : Supposons qu'il existe un difféomorphisme $\sigma : J \to I$ tel que $\gamma \circ \sigma = \eta$ et que γ est régulière en t_0,

IV. Tangence

On suppose que γ est dérivable en t_0.

Proposition 9

Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à γ en t_0.

Remarque : Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, $\frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$ est la "direction instantanée" en t_0, et $\|\gamma'(t_0)\|$ est la "vitesse instantanée" en t_0.

Définition 10

- Si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, on dit que γ est régulière en t_0.
- Si $\gamma'(t_0) = \overrightarrow{0}$, on dit que γ est singulière en t_0.
- Si γ est régulière en tout point de I, on dit que γ est régulière.

Remarque : Supposons qu'il existe un difféomorphisme $\sigma : J \to I$ tel que $\gamma \circ \sigma = \eta$ et que γ est régulière en t_0, alors η est régulière en $\sigma^{-1}(t_0)$.

Proposition 11

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que

Proposition 11

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que

- $\gamma \in \mathcal{C}^k(I \cap \widetilde{I}, \mathbb{R}^d)$,

Proposition 11

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que

- $\gamma \in \mathcal{C}^k(I \cap \widetilde{I}, \mathbb{R}^d)$,
- $\forall i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) = \overrightarrow{0}$,

Proposition 11

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que

- $\gamma \in \mathcal{C}^k(I \cap \widetilde{I}, \mathbb{R}^d)$,
- $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) = \overrightarrow{0}$,
- $\gamma^{(k)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.

Proposition 11

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que

- $\gamma \in \mathcal{C}^k(I \cap \widetilde{I}, \mathbb{R}^d)$,
- $\forall i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) = \overrightarrow{0}$,
- $\gamma^{(k)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.

Alors $\gamma^{(k)}(t_0)$ est un vecteur tangent à γ en t_0.

On suppose que $d = 2$

V. Comportement local des courbes planes

On suppose que $d = 2$ et $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I \cap \widetilde{I}, \mathbb{R}^2)$.

V. Comportement local des courbes planes

On suppose que $d = 2$ et $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I \cap \widetilde{I}, \mathbb{R}^2)$. Soient ensuite $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $r > q$ tels que

On suppose que $d = 2$ et $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I \cap \widetilde{I}, \mathbb{R}^2)$. Soient ensuite $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $r > q$ tels que

- $\forall i \in \{1, \ldots, q-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) = \overrightarrow{0}$,

V. Comportement local des courbes planes

On suppose que $d = 2$ et $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I \cap \widetilde{I}, \mathbb{R}^2)$. Soient ensuite $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $r > q$ tels que

- $\forall i \in \{1, \ldots, q-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) = \overrightarrow{0}$,
- $\gamma^{(q)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$,

V. Comportement local des courbes planes

On suppose que $d = 2$ et $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I \cap \widetilde{I}, \mathbb{R}^2)$. Soient ensuite $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $r > q$ tels que

- $\forall i \in \{1, \dots, q-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) = \overrightarrow{0}$,
- $\gamma^{(q)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$,
- $\forall i \in \{q+1, \dots, r-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) \in \mathrm{Vect}\left\{\gamma^{(q)}(t_0)\right\}$,

V. Comportement local des courbes planes

On suppose que $d = 2$ et $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I \cap \widetilde{I}, \mathbb{R}^2)$. Soient ensuite $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $r > q$ tels que

- $\forall i \in \{1, \ldots, q-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) = \overrightarrow{0}$,
- $\gamma^{(q)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$,
- $\forall i \in \{q+1, \ldots, r-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) \in \mathrm{Vect}\left\{\gamma^{(q)}(t_0)\right\}$,
- $\gamma^{(r)}(t_0) \notin \mathrm{Vect}\left\{\gamma^{(q)}(t_0)\right\}$.

V. Comportement local des courbes planes

On suppose que $d = 2$ et $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I \cap \widetilde{I}, \mathbb{R}^2)$. Soient ensuite $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $r > q$ tels que

- $\forall i \in \{1, \ldots, q-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) = \overrightarrow{0}$,
- $\gamma^{(q)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$,
- $\forall i \in \{q+1, \ldots, r-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) \in \mathrm{Vect}\left\{\gamma^{(q)}(t_0)\right\}$,
- $\gamma^{(r)}(t_0) \notin \mathrm{Vect}\left\{\gamma^{(q)}(t_0)\right\}$.

Alors :

On suppose que $d = 2$ et $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I \cap \widetilde{I}, \mathbb{R}^2)$. Soient ensuite $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $r > q$ tels que

- $\forall i \in \{1, \dots, q-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) = \overrightarrow{0}$,
- $\gamma^{(q)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$,
- $\forall i \in \{q+1, \dots, r-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) \in \mathrm{Vect}\left\{\gamma^{(q)}(t_0)\right\}$,
- $\gamma^{(r)}(t_0) \notin \mathrm{Vect}\left\{\gamma^{(q)}(t_0)\right\}$.

Alors :

Proposition 12

$\left\{\gamma^{(q)}(t_0), \gamma^{(r)}(t_0)\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$

V. Comportement local des courbes planes

On suppose que $d = 2$ et $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I \cap \widetilde{I}, \mathbb{R}^2)$. Soient ensuite $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $r > q$ tels que

- $\forall i \in \{1, \ldots, q-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) = \overrightarrow{0}$,
- $\gamma^{(q)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$,
- $\forall i \in \{q+1, \ldots, r-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) \in \mathrm{Vect}\left\{\gamma^{(q)}(t_0)\right\}$,
- $\gamma^{(r)}(t_0) \notin \mathrm{Vect}\left\{\gamma^{(q)}(t_0)\right\}$.

Alors :

Proposition 12

$\left\{\gamma^{(q)}(t_0), \gamma^{(r)}(t_0)\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et on a, <u>dans cette base</u>,

V. Comportement local des courbes planes

On suppose que $d = 2$ et $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I \cap \widetilde{I}, \mathbb{R}^2)$. Soient ensuite $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $r > q$ tels que

- $\forall i \in \{1, \ldots, q-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) = \overrightarrow{0}$,
- $\gamma^{(q)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$,
- $\forall i \in \{q+1, \ldots, r-1\}$, $\gamma^{(i)}(t_0) \in \mathrm{Vect}\left\{\gamma^{(q)}(t_0)\right\}$,
- $\gamma^{(r)}(t_0) \notin \mathrm{Vect}\left\{\gamma^{(q)}(t_0)\right\}$.

Alors :

Proposition 12

$\left\{\gamma^{(q)}(t_0), \gamma^{(r)}(t_0)\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et on a, <u>dans cette base</u>,

$$\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} \underset{t \to t_0}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{(t-t_0)^q}{q!} \\ \frac{(t-t_0)^r}{r!} \end{pmatrix}$$

V. Comportement local des courbes planes

$$\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} \underset{t \to t_0}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{(t-t_0)^q}{q!} \\ \frac{(t-t_0)^r}{r!} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} \underset{t \to t_0}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{(t-t_0)^q}{q!} \\ \frac{(t-t_0)^r}{r!} \end{pmatrix}$$

- si q est impair et r est pair : t_0 est un <u>point ordinaire</u> de γ,

V. Comportement local des courbes planes

$$\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} \underset{t \to t_0}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{(t-t_0)^q}{q!} \\ \frac{(t-t_0)^r}{r!} \end{pmatrix}$$

- si q est impair et r est pair : t_0 est un point ordinaire de γ,
- si q est impair et r est impair : t_0 est un point d'inflexion de γ,

V. Comportement local des courbes planes

$$\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} \underset{t \to t_0}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{(t-t_0)^q}{q!} \\ \frac{(t-t_0)^r}{r!} \end{pmatrix}$$

- si q est impair et r est pair : t_0 est un <u>point ordinaire</u> de γ,
- si q est impair et r est impair : t_0 est un <u>point d'inflexion</u> de γ,
- si q est pair et r est impair : t_0 est un <u>point de rebroussement de première espère</u> de γ,

V. Comportement local des courbes planes

$$\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} \underset{t \to t_0}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{(t-t_0)^q}{q!} \\ \frac{(t-t_0)^r}{r!} \end{pmatrix}$$

- si q est impair et r est pair : t_0 est un point ordinaire de γ,
- si q est impair et r est impair : t_0 est un point d'inflexion de γ,
- si q est pair et r est impair : t_0 est un point de rebroussement de première espère de γ,
- si q est pair et r est pair : t_0 est un point de rebroussement de deuxième espère de γ.

VI. Longueur d'une courbe paramétrée

Définition 13

Un uplet $(t_0, \ldots, t_n) \in I^{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tel que

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$

Définition 13

Un uplet $(t_0, \dots, t_n) \in I^{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tel que

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$

est appelé une <u>subdivision de I</u>.

Définition 13

Un uplet $(t_0, \ldots, t_n) \in I^{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tel que

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$

est appelé une <u>subdivision de I</u>.

On note Σ_I l'ensemble des subdivisions de I.

VI. Longueur d'une courbe paramétrée

Définition 13

Un uplet $(t_0, \ldots, t_n) \in I^{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tel que

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$

est appelé une <u>subdivision de I</u>.

On note Σ_I l'ensemble des subdivisions de I.

Définition 14

On dit que γ est <u>rectifiable</u>

VI. Longueur d'une courbe paramétrée

Définition 13

Un uplet $(t_0, \dots, t_n) \in I^{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tel que

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$

est appelé une <u>subdivision de I</u>.

On note Σ_I l'ensemble des subdivisions de I.

Définition 14

On dit que γ est <u>rectifiable</u> si

$$\sup_{(t_0,\dots,t_n)\in\Sigma_I,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$$

est fini,

Définition 13

Un uplet $(t_0, \dots, t_n) \in I^{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tel que

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$

est appelé une subdivision de I.

On note Σ_I l'ensemble des subdivisions de I.

Définition 14

On dit que γ est rectifiable si

$$\sup_{(t_0,\dots,t_n)\in\Sigma_I,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$$

est fini, et dans ce cas on note $L(\gamma)$ cette quantité,

Définition 13

Un uplet $(t_0, \dots, t_n) \in I^{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tel que

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n$$

est appelé une <u>subdivision de I</u>.

On note Σ_I l'ensemble des subdivisions de I.

Définition 14

On dit que γ est <u>rectifiable</u> si

$$\sup_{(t_0,\dots,t_n)\in\Sigma_I,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$$

est fini, et dans ce cas on note $L(\gamma)$ cette quantité, appelée <u>longueur de γ</u>.

VI. Longueur d'une courbe paramétrée

Soit J un intervalle contenu dans I,

VI. Longueur d'une courbe paramétrée

Soit J un intervalle contenu dans I, soient $a, b, c \in I$,

Soit J un intervalle contenu dans I, soient $a, b, c \in I$,

Lemme 15

On suppose que γ est rectifiable.

Soit J un intervalle contenu dans I, soient $a, b, c \in I$,

Lemme 15

On suppose que γ est rectifiable. Alors :

VI. Longueur d'une courbe paramétrée

Soit J un intervalle contenu dans I, soient $a, b, c \in I$,

Lemme 15

On suppose que γ est rectifiable. Alors :

- $\gamma_{|J}$ est rectifiable et $L(\gamma) \geq L\left(\gamma_{|J}\right)$,

Soit J un intervalle contenu dans I, soient $a, b, c \in I$,

Lemme 15

On suppose que γ est rectifiable. Alors :

- $\gamma_{|J}$ est rectifiable et $L(\gamma) \geq L\left(\gamma_{|J}\right)$,
- $L(\gamma) = L\left(\gamma_{|I \cap]-\infty;c]}\right) + L\left(\gamma_{|I \cap [c;+\infty[}\right)$,

Soit J un intervalle contenu dans I, soient $a, b, c \in I$,

Lemme 15

On suppose que γ est rectifiable. Alors :

- $\gamma_{|J}$ est rectifiable et $L(\gamma) \geq L\left(\gamma_{|J}\right)$,
- $L(\gamma) = L\left(\gamma_{|I\cap]-\infty;c]}\right) + L\left(\gamma_{|I\cap[c;+\infty[}\right)$,
- $L(\gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$.

Soit J un intervalle contenu dans I, soient $a, b, c \in I$,

Lemme 15

On suppose que γ est rectifiable. Alors :

- $\gamma_{|J}$ est rectifiable et $L(\gamma) \geq L\left(\gamma_{|J}\right)$,
- $L(\gamma) = L\left(\gamma_{|I\cap]-\infty;c]}\right) + L\left(\gamma_{|I\cap[c;+\infty[}\right)$,
- $L(\gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$.

Remarque : Si $\gamma_{|I\cap]-\infty;c]}$ et $\gamma_{|I\cap[c;+\infty[}$ sont rectifiables, alors γ est rectifiable.

Soit J un intervalle contenu dans I, soient $a, b, c \in I$,

Lemme 15

On suppose que γ est rectifiable. Alors :

- $\gamma_{|J}$ est rectifiable et $L(\gamma) \geq L\left(\gamma_{|J}\right)$,
- $L(\gamma) = L\left(\gamma_{|I\cap]-\infty;c]}\right) + L\left(\gamma_{|I\cap[c;+\infty[}\right)$,
- $L(\gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$.

Remarque : Si $\gamma_{|I\cap]-\infty;c]}$ et $\gamma_{|I\cap[c;+\infty[}$ sont rectifiables, alors γ est rectifiable.

Proposition 16

On suppose que $\eta \sim_0 \gamma$.

VI. Longueur d'une courbe paramétrée

Soit J un intervalle contenu dans I, soient $a, b, c \in I$,

Lemme 15

On suppose que γ est rectifiable. Alors :

- $\gamma_{|J}$ est rectifiable et $L(\gamma) \geq L\left(\gamma_{|J}\right)$,
- $L(\gamma) = L\left(\gamma_{|I\cap]-\infty;c]}\right) + L\left(\gamma_{|I\cap[c;+\infty[}\right)$,
- $L(\gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$.

<u>Remarque :</u> Si $\gamma_{|I\cap]-\infty;c]}$ et $\gamma_{|I\cap[c;+\infty[}$ sont rectifiables, alors γ est rectifiable.

Proposition 16

On suppose que $\eta \sim_0 \gamma$. Alors γ est rectifiable ssi η est rectifiable,

VI. Longueur d'une courbe paramétrée

Soit J un intervalle contenu dans I, soient $a, b, c \in I$,

Lemme 15

On suppose que γ est rectifiable. Alors :

- $\gamma_{|J}$ est rectifiable et $L(\gamma) \geq L\left(\gamma_{|J}\right)$,
- $L(\gamma) = L\left(\gamma_{|I\cap]-\infty;c]}\right) + L\left(\gamma_{|I\cap[c;+\infty[}\right)$,
- $L(\gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$.

Remarque : Si $\gamma_{|I\cap]-\infty;c]}$ et $\gamma_{|I\cap[c;+\infty[}$ sont rectifiables, alors γ est rectifiable.

Proposition 16

On suppose que $\eta \sim_0 \gamma$. Alors γ est rectifiable ssi η est rectifiable, et dans ce cas $L(\gamma) = L(\eta)$.

VI. Longueur d'une courbe paramétrée

Théorème 17

Théorème 17

On suppose que $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

VI. Longueur d'une courbe paramétrée

Théorème 17

On suppose que $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b])$,

VI. Longueur d'une courbe paramétrée

Théorème 17

On suppose que $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors γ est rectifiable,

Théorème 17

On suppose que $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors γ est rectifiable, et

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t.$$

VII. Paramétrisation normale

On suppose que η est rectifiable.

VII. Paramétrisation normale

On suppose que η est rectifiable.

Définition 18

On dit que η est normale

VII. Paramétrisation normale

On suppose que η est rectifiable.

Définition 18

On dit que η est <u>normale</u> si pour tous $l_1, l_2 \in J$ tels que $l_1 \leq l_2$,

On suppose que η est rectifiable.

Définition 18

On dit que η est <u>normale</u> si pour tous $l_1, l_2 \in J$ tels que $l_1 \leq l_2$,

$$L(\eta_{|[l_1,l_2]}) = l_2 - l_1.$$

VII. Paramétrisation normale

On suppose que η est rectifiable.

Définition 18

On dit que η est normale si pour tous $l_1, l_2 \in J$ tels que $l_1 \leq l_2$,

$$L(\eta_{|[l_1,l_2]}) = l_2 - l_1.$$

Remarque : Si η est normale, on dit aussi que η est une paramétrisation par longueurs d'arc.

VII. Paramétrisation normale

On suppose que η est rectifiable.

Définition 18

On dit que η est <u>normale</u> si pour tous $l_1, l_2 \in J$ tels que $l_1 \leq l_2$,

$$L(\eta_{|[l_1,l_2]}) = l_2 - l_1.$$

Remarque : Si η est normale, on dit aussi que η est une paramétrisation par longueurs d'arc.

Proposition 19

On suppose que η est de classe $\mathcal{C}^1$.

On suppose que η est rectifiable.

Définition 18

On dit que η est <u>normale</u> si pour tous $l_1, l_2 \in J$ tels que $l_1 \leq l_2$,

$$L(\eta_{|[l_1,l_2]}) = l_2 - l_1.$$

<u>Remarque :</u> Si η est normale, on dit aussi que η est une <u>paramétrisation par longueurs d'arc</u>.

Proposition 19

On suppose que η est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors η est normale ssi

On suppose que η est rectifiable.

Définition 18

On dit que η est normale si pour tous $l_1, l_2 \in J$ tels que $l_1 \leq l_2$,

$$L(\eta_{|[l_1,l_2]}) = l_2 - l_1.$$

Remarque : Si η est normale, on dit aussi que η est une paramétrisation par longueurs d'arc.

Proposition 19

On suppose que η est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors η est normale ssi $\forall l \in J$, $\|\eta'(l)\| = 1$.

VIII. Abscisse curviligne

On suppose que γ est de classe $\mathcal{C}^1$,

VIII. Abscisse curviligne

On suppose que γ est de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $t_0 \in I$.

VIII. Abscisse curviligne

On suppose que γ est de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $t_0 \in I$.

Définition 20

La fonction

$$s_{t_0} : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| \mathrm{d}u \end{array}$$

VIII. Abscisse curviligne

On suppose que γ est de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $t_0 \in I$.

Définition 20

La fonction

$$s_{t_0} : \begin{array}{rcl} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| \mathrm{d}u \end{array}$$

est appelée abscisse curviligne de γ à partir de t_0.

VIII. Abscisse curviligne

On suppose que γ est de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $t_0 \in I$.

Définition 20

La fonction

$$s_{t_0} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| \mathrm{d}u \end{array}$$

est appelée abscisse curviligne de γ à partir de t_0.

Remarque : Pour tout $t \in I$,

VIII. Abscisse curviligne

On suppose que γ est de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $t_0 \in I$.

Définition 20

La fonction

$$s_{t_0} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| \mathrm{d}u \end{array}$$

est appelée abscisse curviligne de γ à partir de t_0.

Remarque : Pour tout $t \in I$,

$$s_{t_0}(t) = \begin{cases} L(\gamma_{|[t_0,t]}) & \text{si } t \geq t_0, \\ -L(\gamma_{|[t,t_0]}) & \text{si } t \leq t_0. \end{cases}$$

VIII. Abscisse curviligne

Théorème 21

Théorème 21

On suppose que γ est régulière et de classe $\mathcal{C}^k(I)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Théorème 21

On suppose que γ est régulière et de classe $\mathcal{C}^k(I)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors $s_{t_0} : I \to s_{t_0}(I)$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme

VIII. Abscisse curviligne

Théorème 21

On suppose que γ est régulière et de classe $\mathcal{C}^k(I)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors $s_{t_0} : I \to s_{t_0}(I)$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme et l'application

$$\gamma \circ s_{t_0}^{-1} : s_{t_0}(I) \to \mathbb{R}^d$$

est une reparamétrisation normale de classe $\mathcal{C}^k$ de C_γ.

IX. Courbure d'une courbe paramétrée

IX. Courbure d'une courbe paramétrée

Soit $\eta : J \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée normale de classe $\mathcal{C}^2$.

IX. Courbure d'une courbe paramétrée

Soit $\eta : J \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée <u>normale</u> de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $s \in J$,

IX. Courbure d'une courbe paramétrée

Soit $\eta : J \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée <u>normale</u> de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $s \in J$, alors

- $\eta'(s)$ est un vecteur tangent unitaire à η en s,

IX. Courbure d'une courbe paramétrée

Soit $\eta : J \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée normale de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $s \in J$, alors

- $\eta'(s)$ est un vecteur tangent unitaire à η en s,
- $\eta''(s)$ est orthogonal à $\eta'(s)$:

IX. Courbure d'une courbe paramétrée

Soit $\eta : J \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée <u>normale</u> de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $s \in J$, alors

- $\eta'(s)$ est un vecteur tangent unitaire à η en s,
- $\eta''(s)$ est orthogonal à $\eta'(s)$:

Proposition 22

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$,

IX. Courbure d'une courbe paramétrée

Soit $\eta : J \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée <u>normale</u> de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $s \in J$, alors

- $\eta'(s)$ est un vecteur tangent unitaire à η en s,
- $\eta''(s)$ est orthogonal à $\eta'(s)$:

Proposition 22

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$, on a

$$\langle \eta''(s), \eta'(s) \rangle = 0.$$

Par ailleurs,

Définition 23

On appelle courbure de η en s le réel positif ou nul

$$\kappa(s) := \|\eta''(s)\|.$$

IX. Courbure d'une courbe paramétrée

Par ailleurs,

Définition 23

On appelle courbure de η en s le réel positif ou nul

$$\kappa(s) := \|\eta''(s)\|.$$

$\kappa(s)$ "quantifie" à quel point η est "courbe" en s, Par ailleurs,

Définition 23

On appelle courbure de η en s le réel positif ou nul

$$\kappa(s) := \|\eta''(s)\|.$$

$\kappa(s)$ "quantifie" à quel point η est "courbe" en s, comme illustré par :

IX. Courbure d'une courbe paramétrée

Par ailleurs,

Définition 23

On appelle courbure de η en s le réel positif ou nul

$$\kappa(s) := \|\eta''(s)\|.$$

$\kappa(s)$ "quantifie" à quel point η est "courbe" en s, comme illustré par :

Proposition 24

Si $\forall s \in J$, $\kappa(s) = 0$, alors C_η est contenu dans une droite affine de $\mathbb{R}^d$.

IX. Courbure d'une courbe paramétrée

On note

On note

$$\overrightarrow{t}(s) := \eta'(s)$$

On note

$$\overrightarrow{t}(s) := \eta'(s)$$

le vecteur dit <u>tangent unitaire</u> à η en s

IX. Courbure d'une courbe paramétrée

On note
$$\overrightarrow{t}(s) := \eta'(s)$$
le vecteur dit <u>tangent unitaire</u> à η en s et, si $\kappa(s) \neq 0$,

IX. Courbure d'une courbe paramétrée

On note
$$\overrightarrow{t}(s) := \eta'(s)$$
le vecteur dit tangent unitaire à η en s et, si $\kappa(s) \neq 0$,
$$\overrightarrow{n}(s) := \frac{1}{\kappa(s)}\overrightarrow{t}'(s) = \frac{1}{\|\eta''(s)\|}\eta''(s),$$

IX. Courbure d'une courbe paramétrée

On note

$$\overrightarrow{t}(s) := \eta'(s)$$

le vecteur dit tangent unitaire à η en s et, si $\kappa(s) \neq 0$,

$$\overrightarrow{n}(s) := \frac{1}{\kappa(s)} \overrightarrow{t}'(s) = \frac{1}{\|\eta''(s)\|} \eta''(s),$$

le vecteur dit normal principal à η en s.

X. Repère de Frenet et cercle osculateur d'une courbe plane

On suppose que η est une courbe normale plane,

X. Repère de Frenet et cercle osculateur d'une courbe plane

On suppose que η est une courbe normale plane, et que $\kappa(s) \neq 0$.

X. Repère de Frenet et cercle osculateur d'une courbe plane

On suppose que η est une courbe normale plane, et que $\kappa(s) \neq 0$.

Définition 25

Le triplet

$$\left(\eta(s), \overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s)\right)$$

est appelé repère de Frenet de η en s.

X. Repère de Frenet et cercle osculateur d'une courbe plane

On suppose que η est une courbe normale plane, et que $\kappa(s) \neq 0$.

Définition 25

Le triplet

$$\left(\eta(s), \overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s)\right)$$

est appelé repère de Frenet de η en s. On note de plus

X. Repère de Frenet et cercle osculateur d'une courbe plane

On suppose que η est une courbe normale plane, et que $\kappa(s) \neq 0$.

Définition 25

Le triplet

$$\left(\eta(s), \overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s)\right)$$

est appelé repère de Frenet de η en s. On note de plus

- $R(s) := \frac{1}{\kappa(s)}$,

X. Repère de Frenet et cercle osculateur d'une courbe plane

On suppose que η est une courbe normale plane, et que $\kappa(s) \neq 0$.

Définition 25

Le triplet

$$\left(\eta(s), \overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s)\right)$$

est appelé repère de Frenet de η en s. On note de plus

- $R(s) := \frac{1}{\kappa(s)}$, le rayon de courbure de η en s,

X. Repère de Frenet et cercle osculateur d'une courbe plane

On suppose que η est une courbe normale plane, et que $\kappa(s) \neq 0$.

Définition 25

Le triplet

$$\left(\eta(s), \overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s)\right)$$

est appelé repère de Frenet de η en s. On note de plus

- $R(s) := \frac{1}{\kappa(s)}$, le rayon de courbure de η en s,
- $C(s) := \eta(s) + R(s) \cdot \overrightarrow{n}(s)$,

X. Repère de Frenet et cercle osculateur d'une courbe plane

On suppose que η est une courbe normale plane, et que $\kappa(s) \neq 0$.

Définition 25

Le triplet

$$\left(\eta(s), \overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s)\right)$$

est appelé repère de Frenet de η en s. On note de plus

- $R(s) := \frac{1}{\kappa(s)}$, le rayon de courbure de η en s,
- $C(s) := \eta(s) + R(s) \cdot \overrightarrow{n}(s)$, le centre de courbure de η en s,

X. Repère de Frenet et cercle osculateur d'une courbe plane

On suppose que η est une courbe normale plane, et que $\kappa(s) \neq 0$.

Définition 25

Le triplet

$$\left(\eta(s), \overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s)\right)$$

est appelé repère de Frenet de η en s. On note de plus

- $R(s) := \frac{1}{\kappa(s)}$, le rayon de courbure de η en s,
- $C(s) := \eta(s) + R(s) \cdot \overrightarrow{n}(s)$, le centre de courbure de η en s,
- $\mathscr{C}(s)$ le cercle de centre $C(s)$ et de rayon $R(s)$,

X. Repère de Frenet et cercle osculateur d'une courbe plane

On suppose que η est une courbe normale plane, et que $\kappa(s) \neq 0$.

Définition 25

Le triplet

$$\left(\eta(s), \overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s)\right)$$

est appelé repère de Frenet de η en s. On note de plus

- $R(s) := \frac{1}{\kappa(s)}$, le rayon de courbure de η en s,
- $C(s) := \eta(s) + R(s) \cdot \overrightarrow{n}(s)$, le centre de courbure de η en s,
- $\mathscr{C}(s)$ le cercle de centre $C(s)$ et de rayon $R(s)$, appelé cercle osculateur de η en s.

X. Repère de Frenet et cercle osculateur d'une courbe plane

On suppose que η est une courbe normale plane, et que $\kappa(s) \neq 0$.

Définition 25

Le triplet

$$\left(\eta(s), \overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s)\right)$$

est appelé repère de Frenet de η en s. On note de plus

- $R(s) := \frac{1}{\kappa(s)}$, le rayon de courbure de η en s,
- $C(s) := \eta(s) + R(s) \cdot \overrightarrow{n}(s)$, le centre de courbure de η en s,
- $\mathscr{C}(s)$ le cercle de centre $C(s)$ et de rayon $R(s)$, appelé cercle osculateur de η en s.

Le cercle osculateur $\mathscr{C}(s)$ approche η au voisinage de s, à l'ordre deux.

XI. Formules de Frenet

On suppose que l'application $J \to \mathbb{R}^2$; $s \mapsto \overrightarrow{n}(s)$ est dérivable.

XI. Formules de Frenet

On suppose que l'application $J \to \mathbb{R}^2$; $s \mapsto \overrightarrow{n}(s)$ est dérivable.

Théorème 25

On a les égalités

XI. Formules de Frenet

On suppose que l'application $J \to \mathbb{R}^2$; $s \mapsto \overrightarrow{n}(s)$ est dérivable.

Théorème 25

On a les égalités

$$\begin{cases} \overrightarrow{t}' = \kappa \overrightarrow{n} \\ \end{cases}$$

XI. Formules de Frenet

On suppose que l'application $J \to \mathbb{R}^2$; $s \mapsto \overrightarrow{n}(s)$ est dérivable.

Théorème 25

On a les égalités

$$\begin{cases} \overrightarrow{t}' = \kappa \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{n}' = -\kappa \overrightarrow{t} \end{cases}$$

XI. Formules de Frenet

On suppose que l'application $J \to \mathbb{R}^2$; $s \mapsto \overrightarrow{n}(s)$ est dérivable.

Théorème 25

On a les égalités

$$\begin{cases} \overrightarrow{t}' = \kappa \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{n}' = -\kappa \overrightarrow{t} \end{cases}$$

appelées <u>formules de Frenet</u>.

XI. Formules de Frenet

On suppose que l'application $J \to \mathbb{R}^2$; $s \mapsto \overrightarrow{n}(s)$ est dérivable.

Théorème 25

On a les égalités

$$\begin{cases} \overrightarrow{t}' = \kappa \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{n}' = -\kappa \overrightarrow{t} \end{cases}$$

appelées <u>formules de Frenet</u>.

Corollaire 26

On suppose que $\overrightarrow{n}$ est dérivable et κ est constante.

XI. Formules de Frenet

On suppose que l'application $J \to \mathbb{R}^2$; $s \mapsto \overrightarrow{n}(s)$ est dérivable.

Théorème 25

On a les égalités

$$\begin{cases} \overrightarrow{t}' = \kappa \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{n}' = -\kappa \overrightarrow{t} \end{cases}$$

appelées formules de Frenet.

Corollaire 26

On suppose que $\overrightarrow{n}$ est dérivable et κ est constante. Alors $\forall s \in J$, $C_\eta \subset \mathscr{C}(s)$.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), et soit $p = \gamma(t)$, $t \in I$, un point simple de $C := C_\gamma$.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), et soit $p = \gamma(t)$, $t \in I$, un point simple de $C := C_\gamma$. Peut-on définir

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), et soit $p = \gamma(t)$, $t \in I$, un point simple de $C := C_\gamma$. Peut-on définir

- une courbure de C en p,

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), et soit $p = \gamma(t)$, $t \in I$, un point simple de $C := C_\gamma$. Peut-on définir

- une courbure de C en p,
- un repère de Frenet de C en p,

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), et soit $p = \gamma(t)$, $t \in I$, un point simple de $C := C_\gamma$. Peut-on définir

- une courbure de C en p,
- un repère de Frenet de C en p,
- un cercle osculateur de C en p

?

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), et soit $p = \gamma(t)$, $t \in I$, un point simple de $C := C_\gamma$. Peut-on définir

- une courbure de C en p,
- un repère de Frenet de C en p,
- un cercle osculateur de C en p

?

Définition 27

Supposons que $\eta : J \to \mathbb{R}^2$ soit une reparamétrisation normale de classe $\mathcal{C}^2$ de C

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), et soit $p = \gamma(t)$, $t \in I$, un point simple de $C := C_\gamma$. Peut-on définir

- une courbure de C en p,
- un repère de Frenet de C en p,
- un cercle osculateur de C en p

?

Définition 27

Supposons que $\eta : J \to \mathbb{R}^2$ soit une reparamétrisation normale de classe $\mathcal{C}^2$ de C et soit $\sigma : I \to J$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $\gamma = \eta \circ \sigma$.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), et soit $p = \gamma(t)$, $t \in I$, un point simple de $C := C_\gamma$. Peut-on définir

- une courbure de C en p,
- un repère de Frenet de C en p,
- un cercle osculateur de C en p

?

Définition 27

Supposons que $\eta : J \to \mathbb{R}^2$ soit une reparamétrisation normale de classe $\mathcal{C}^2$ de C et soit $\sigma : I \to J$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $\gamma = \eta \circ \sigma$. On note $s := \sigma(t)$ puis

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), et soit $p = \gamma(t)$, $t \in I$, un point simple de $C := C_\gamma$. Peut-on définir

- une courbure de C en p,
- un repère de Frenet de C en p,
- un cercle osculateur de C en p

?

Définition 27

Supposons que $\eta : J \to \mathbb{R}^2$ soit une reparamétrisation normale de classe $\mathcal{C}^2$ de C et soit $\sigma : I \to J$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $\gamma = \eta \circ \sigma$. On note $s := \sigma(t)$ puis

- $\kappa(p) := \kappa(s)$, la courbure de C en p,

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), et soit $p = \gamma(t)$, $t \in I$, un point simple de $C := C_\gamma$. Peut-on définir

- une courbure de C en p,
- un repère de Frenet de C en p,
- un cercle osculateur de C en p

?

Définition 27

Supposons que $\eta : J \to \mathbb{R}^2$ soit une reparamétrisation normale de classe $\mathcal{C}^2$ de C et soit $\sigma : I \to J$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $\gamma = \eta \circ \sigma$. On note $s := \sigma(t)$ puis

- $\kappa(p) := \kappa(s)$, la courbure de C en p,
- $\left(p, \vec{t}(p), \vec{n}(p)\right) := \left(\eta(s), \vec{t}(p), \vec{n}(p)\right)$, le repère de Frenet de C en p,

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), et soit $p = \gamma(t)$, $t \in I$, un point simple de $C := C_\gamma$. Peut-on définir

- une courbure de C en p,
- un repère de Frenet de C en p,
- un cercle osculateur de C en p

?

Définition 27

Supposons que $\eta : J \to \mathbb{R}^2$ soit une reparamétrisation normale de classe $\mathcal{C}^2$ de C et soit $\sigma : I \to J$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $\gamma = \eta \circ \sigma$. On note $s := \sigma(t)$ puis

- $\kappa(p) := \kappa(s)$, la courbure de C en p,
- $\left(p, \overrightarrow{t}(p), \overrightarrow{n}(p)\right) := \left(\eta(s), \overrightarrow{t}(p), \overrightarrow{n}(p)\right)$, le repère de Frenet de C en p,
- $\mathscr{C}(p) := \mathscr{C}(s)$ le cercle osculateur de C en p.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), et soit $p = \gamma(t)$, $t \in I$, un point simple de $C := C_\gamma$. Peut-on définir

- une courbure de C en p,
- un repère de Frenet de C en p,
- un cercle osculateur de C en p

?

Définition 27

Supposons que $\eta : J \to \mathbb{R}^2$ soit une reparamétrisation normale de classe $\mathcal{C}^2$ de C et soit $\sigma : I \to J$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $\gamma = \eta \circ \sigma$. On note $s := \sigma(t)$ puis

- $\kappa(p) := \kappa(s)$, la courbure de C en p,
- $\left(p, \overrightarrow{t}(p), \overrightarrow{n}(p)\right) := \left(\eta(s), \overrightarrow{t}(p), \overrightarrow{n}(p)\right)$, le repère de Frenet de C en p,
- $\mathscr{C}(p) := \mathscr{C}(s)$ le cercle osculateur de C en p.

Remarque : Ces différentes quantités

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), et soit $p = \gamma(t)$, $t \in I$, un point simple de $C := C_\gamma$. Peut-on définir

- une courbure de C en p,
- un repère de Frenet de C en p,
- un cercle osculateur de C en p

?

Définition 27

Supposons que $\eta : J \to \mathbb{R}^2$ soit une reparamétrisation normale de classe $\mathcal{C}^2$ de C et soit $\sigma : I \to J$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $\gamma = \eta \circ \sigma$. On note $s := \sigma(t)$ puis

- $\kappa(p) := \kappa(s)$, la courbure de C en p,
- $\left(p, \overrightarrow{t}(p), \overrightarrow{n}(p)\right) := \left(\eta(s), \overrightarrow{t}(p), \overrightarrow{n}(p)\right)$, le repère de Frenet de C en p,
- $\mathscr{C}(p) := \mathscr{C}(s)$ le cercle osculateur de C en p.

Remarque : Ces différentes quantités

- sont indépendantes de la reparamétrisation normale de classe $\mathcal{C}^2$ de C choisie,

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ régulière (non normale), et soit $p = \gamma(t)$, $t \in I$, un point simple de $C := C_\gamma$. Peut-on définir

- une courbure de C en p,
- un repère de Frenet de C en p,
- un cercle osculateur de C en p

?

Définition 27

Supposons que $\eta : J \to \mathbb{R}^2$ soit une reparamétrisation normale de classe $\mathcal{C}^2$ de C et soit $\sigma : I \to J$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $\gamma = \eta \circ \sigma$. On note $s := \sigma(t)$ puis

- $\kappa(p) := \kappa(s)$, la courbure de C en p,
- $\left(p, \overrightarrow{t}(p), \overrightarrow{n}(p)\right) := \left(\eta(s), \overrightarrow{t}(p), \overrightarrow{n}(p)\right)$, le repère de Frenet de C en p,
- $\mathscr{C}(p) := \mathscr{C}(s)$ le cercle osculateur de C en p.

Remarque : Ces différentes quantités

- sont indépendantes de la reparamétrisation normale de classe $\mathcal{C}^2$ de C choisie,
- peuvent être calculées directement à partir de γ.

Théorème 28

On a

- $p = \gamma(t)$,

Théorème 28

On a

- $p = \gamma(t)$,
- $\overrightarrow{t}(p) = \pm \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t)$,

Théorème 28

On a

- $p = \gamma(t)$,
- $\overrightarrow{t}(p) = \pm \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t)$,
- $\kappa(p) = \frac{\left|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))\right|}{\|\gamma'(t)\|^3}$,

Théorème 28

On a

- $p = \gamma(t)$,
- $\overrightarrow{t}(p) = \pm\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t)$,
- $\kappa(p) = \frac{\left|\det(\gamma'(t),\gamma''(t))\right|}{\|\gamma'(t)\|^3}$,
- $\overrightarrow{n}(p) = \frac{\|\gamma'(t)\|}{|\det(\gamma'(t),\gamma''(t))|}\left(\gamma''(t) - \frac{\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle}{\|\gamma'(t)\|^2}\gamma'(t)\right)$.