Chapitre 2 : Constructibilité à la règle et au compas

I. Points constructibles du plan

On se place dans un plan $(\mathcal{P})$.

I. Points constructibles du plan

On se place dans un plan $(\mathcal{P})$.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de points du plan.

I. Points constructibles du plan

On se place dans un plan $(\mathcal{P})$.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de points du plan. On note

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}} := \{(AB) \mid A, B \in \mathcal{E},\ A \neq B\}$$

I. Points constructibles du plan

On se place dans un plan $(\mathcal{P})$.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de points du plan. On note

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}} := \{(AB) \mid A, B \in \mathcal{E},\ A \neq B\}$$

et

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}} := \{\mathcal{C}(C, [AB]) \mid A, B, C \in \mathcal{E},\ A \neq B\}.$$

I. Points constructibles du plan

On se place dans un plan $(\mathcal{P})$.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de points du plan. On note

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}} := \{(AB) \mid A, B \in \mathcal{E},\ A \neq B\}$$

et

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}} := \{\mathcal{C}(C, [AB]) \mid A, B, C \in \mathcal{E},\ A \neq B\}.$$

Soit $P \in (\mathcal{P})$.

I. Points constructibles du plan

On se place dans un plan $(\mathcal{P})$.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de points du plan. On note

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}} := \{(AB) \mid A, B \in \mathcal{E},\ A \neq B\}$$

et

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}} := \{\mathcal{C}(C, [AB]) \mid A, B, C \in \mathcal{E},\ A \neq B\}\,.$$

Soit $P \in (\mathcal{P})$.

Définition 1

On dit que P est

I. Points constructibles du plan

On se place dans un plan $(\mathcal{P})$.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de points du plan. On note

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}} := \{(AB) \mid A, B \in \mathcal{E},\ A \neq B\}$$

et

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}} := \{\mathcal{C}(C, [AB]) \mid A, B, C \in \mathcal{E},\ A \neq B\}.$$

Soit $P \in (\mathcal{P})$.

Définition 1

On dit que P est

- <u>constructible en zéro étape à partir de $\mathcal{E}$</u> si $P \in \mathcal{E}$, On se place dans un plan $(\mathcal{P})$.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de points du plan. On note

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}} := \{(AB) \mid A, B \in \mathcal{E},\ A \neq B\}$$

et

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}} := \{\mathcal{C}(C, [AB]) \mid A, B, C \in \mathcal{E},\ A \neq B\}\,.$$

Soit $P \in (\mathcal{P})$.

Définition 1

On dit que P est

- <u>constructible en zéro étape à partir de $\mathcal{E}$</u> si $P \in \mathcal{E}$,
- <u>constructible en une étape à partir de $\mathcal{E}$</u> si P est à l'intersection de deux éléments distincts de $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{E}}$.

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$.

I. Points constructibles du plan

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. On dit qu'un point P est <u>constructible en n étapes à partir de $\mathcal{E}$</u>

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. On dit qu'un point P est constructible en n étapes à partir de $\mathcal{E}$ s'il existe une suite finie $P_1, \ldots, P_n$ de points de plan tels que

I. Points constructibles du plan

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. On dit qu'un point P est constructible en n étapes à partir de $\mathcal{E}$ s'il existe une suite finie $P_1, \ldots, P_n$ de points de plan tels que

1. P_1 est constructible en une étape à partir de $\mathcal{E}$,

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. On dit qu'un point P est <u>constructible en n étapes à partir de $\mathcal{E}$</u> s'il existe une suite finie $P_1, \ldots, P_n$ de points de plan tels que

1. P_1 est constructible en une étape à partir de $\mathcal{E}$,
2. pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, P_i est constructible en une étape à partir de $\mathcal{E} \cup \{P_j,\ j \in \{1, \ldots, i-1\}$,

I. Points constructibles du plan

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. On dit qu'un point P est <u>constructible en n étapes à partir de $\mathcal{E}$</u> s'il existe une suite finie $P_1, \ldots, P_n$ de points de plan tels que

1. P_1 est constructible en une étape à partir de $\mathcal{E}$,
2. pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, P_i est constructible en une étape à partir de $\mathcal{E} \cup \{P_j,\ j \in \{1, \ldots, i-1\}$,
3. $P_n = P$.

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. On dit qu'un point P est constructible en n étapes à partir de $\mathcal{E}$ s'il existe une suite finie $P_1, \ldots, P_n$ de points de plan tels que

1. P_1 est constructible en une étape à partir de $\mathcal{E}$,
2. pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, P_i est constructible en une étape à partir de $\mathcal{E} \cup \{P_j,\ j \in \{1, \ldots, i-1\}$,
3. $P_n = P$.

On dit que P est constructible à partir de $\mathcal{E}$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que P est constructible en n étapes à partir de $\mathcal{E}$.

I. Points constructibles du plan

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. On dit qu'un point P est constructible en n étapes à partir de $\mathcal{E}$ s'il existe une suite finie $P_1, \dots, P_n$ de points de plan tels que

1. P_1 est constructible en une étape à partir de $\mathcal{E}$,
2. pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, P_i est constructible en une étape à partir de $\mathcal{E} \cup \{P_j,\ j \in \{1, \dots, i-1\}$,
3. $P_n = P$.

On dit que P est constructible à partir de $\mathcal{E}$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que P est constructible en n étapes à partir de $\mathcal{E}$.

Remarque

Les points constructibles à partir de $\mathcal{E}$ sont les points constructibles à la règle (non graduée) et au compas à partir des points de $\mathcal{E}$.

Exemple

Le milieu d'un segment $[AB]$ est constructible à partir de $\{A, B\}$.

Exemple

Le milieu d'un segment $[AB]$ est constructible à partir de $\{A, B\}$.

Soient A, B et C trois points distincts constructibles à partir de $\mathcal{E}$.

Exemple

Le milieu d'un segment $[AB]$ est constructible à partir de $\{A, B\}$.

Soient A, B et C trois points distincts constructibles à partir de $\mathcal{E}$.

- la droite (AB) est dite <u>constructible à partir de $\mathcal{E}$</u>,

I. Points constructibles du plan

Exemple

Le milieu d'un segment $[AB]$ est constructible à partir de $\{A, B\}$.

Soient A, B et C trois points distincts constructibles à partir de $\mathcal{E}$.

- la droite (AB) est dite <u>constructible à partir de $\mathcal{E}$</u>,
- le cercle $\mathcal{C}(C, [AB])$ est dit <u>constructible à partir de $\mathcal{E}$</u>.

Exemple

Le milieu d'un segment $[AB]$ est constructible à partir de $\{A, B\}$.

Soient A, B et C trois points distincts constructibles à partir de $\mathcal{E}$.

- la droite (AB) est dite constructible à partir de $\mathcal{E}$,
- le cercle $\mathcal{C}(C, [AB])$ est dit constructible à partir de $\mathcal{E}$.

Exemples

Sont constructibles à partir de $\{A, B, C\}$:

Exemple

Le milieu d'un segment $[AB]$ est constructible à partir de $\{A, B\}$.

Soient A, B et C trois points distincts constructibles à partir de $\mathcal{E}$.

- la droite (AB) est dite <u>constructible à partir de $\mathcal{E}$</u>,
- le cercle $\mathcal{C}(C, [AB])$ est dit <u>constructible à partir de $\mathcal{E}$</u>.

Exemples

Sont constructibles à partir de $\{A, B, C\}$:

- la médiatrice du segment $[AB]$,

I. Points constructibles du plan

Exemple

Le milieu d'un segment $[AB]$ est constructible à partir de $\{A, B\}$.

Soient A, B et C trois points distincts constructibles à partir de $\mathcal{E}$.

- la droite (AB) est dite <u>constructible à partir de $\mathcal{E}$</u>,
- le cercle $\mathcal{C}(C, [AB])$ est dit <u>constructible à partir de $\mathcal{E}$</u>.

Exemples

Sont constructibles à partir de $\{A, B, C\}$:

- la médiatrice du segment $[AB]$,
- la droite perpendiculaire à (AB) passant par A,

Exemple

Le milieu d'un segment $[AB]$ est constructible à partir de $\{A, B\}$.

Soient A, B et C trois points distincts constructibles à partir de $\mathcal{E}$.

- la droite (AB) est dite <u>constructible à partir de $\mathcal{E}$</u>,
- le cercle $\mathcal{C}(C, [AB])$ est dit <u>constructible à partir de $\mathcal{E}$</u>.

Exemples

Sont constructibles à partir de $\{A, B, C\}$:

- la médiatrice du segment $[AB]$,
- la droite perpendiculaire à (AB) passant par A,
- si $C \notin (AB)$, la parallèle à (AB) passant à C,

Exemple

Le milieu d'un segment $[AB]$ est constructible à partir de $\{A, B\}$.

Soient A, B et C trois points distincts constructibles à partir de $\mathcal{E}$.

- la droite (AB) est dite constructible à partir de $\mathcal{E}$,
- le cercle $\mathcal{C}(C, [AB])$ est dit constructible à partir de $\mathcal{E}$.

Exemples

Sont constructibles à partir de $\{A, B, C\}$:

- la médiatrice du segment $[AB]$,
- la droite perpendiculaire à (AB) passant par A,
- si $C \notin (AB)$, la parallèle à (AB) passant à C,
- si $C \notin (AB)$, la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.

I. Points constructibles du plan

Exemple

Le milieu d'un segment $[AB]$ est constructible à partir de $\{A, B\}$.

Soient A, B et C trois points distincts constructibles à partir de $\mathcal{E}$.

- la droite (AB) est dite constructible à partir de $\mathcal{E}$,
- le cercle $\mathcal{C}(C, [AB])$ est dit constructible à partir de $\mathcal{E}$.

Exemples

Sont constructibles à partir de $\{A, B, C\}$:

- la médiatrice du segment $[AB]$,
- la droite perpendiculaire à (AB) passant par A,
- si $C \notin (AB)$, la parallèle à (AB) passant à C,
- si $C \notin (AB)$, la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.

Remarque : Un point construit à l'aide de droites et/ou de cercles constructibles à partir de $\mathcal{E}$ est constructible à partir de $\mathcal{E}$.

II. Constructibilité et extensions de corps

Soient O et A deux points distincts de $\mathcal{E}$

Soient O et A deux points distincts de $\mathcal{E}$ et soit B tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal.

Soient O et A deux points distincts de $\mathcal{E}$ et soit B tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

Soient O et A deux points distincts de $\mathcal{E}$ et soit B tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

Si $\mathcal{E} = \{(x_i, y_i),\ i \in I\}$, on note

Soient O et A deux points distincts de $\mathcal{E}$ et soit B tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

Si $\mathcal{E} = \{(x_i, y_i),\ i \in I\}$, on note

$$\mathbb{Q}(\mathcal{E}) := \mathbb{Q}\left(\bigcup_{i \in I} \{x_i, y_i\}\right).$$

II. Constructibilité et extensions de corps

Soient O et A deux points distincts de $\mathcal{E}$ et soit B tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

Si $\mathcal{E} = \{(x_i, y_i),\ i \in I\}$, on note

$$\mathbb{Q}(\mathcal{E}) := \mathbb{Q}\left(\bigcup_{i \in I} \{x_i, y_i\}\right).$$

Remarque :

Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F} \subset (\mathcal{P})$, $\mathbb{Q}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{Q}(\mathcal{F})$.

Soient O et A deux points distincts de $\mathcal{E}$ et soit B tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

Si $\mathcal{E} = \{(x_i, y_i),\ i \in I\}$, on note

$$\mathbb{Q}(\mathcal{E}) := \mathbb{Q}\left(\bigcup_{i\in I}\{x_i, y_i\}\right).$$

Remarque :

Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F} \subset (\mathcal{P})$, $\mathbb{Q}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{Q}(\mathcal{F})$.

Dans la suite, on dira "constructible" pour "constructible à partir de $\mathcal{E}$".

Soit $P = (x_0, y_0)$ un point de $(\mathcal{P})$,

Soit $P = (x_0, y_0)$ un point de $(\mathcal{P})$, alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) = Q(\mathcal{E})(x_0, y_0)$ est une extension de $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$.

Soit $P = (x_0, y_0)$ un point de $(\mathcal{P})$, alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) = Q(\mathcal{E})(x_0, y_0)$ est une extension de $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$.

Proposition 3

On suppose que P est constructible en une étape.

II. Constructibilité et extensions de corps

Soit $P = (x_0, y_0)$ un point de $(\mathcal{P})$, alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) = Q(\mathcal{E})(x_0, y_0)$ est une extension de $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$.

Proposition 3

On suppose que P est constructible en une étape. Alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big)$ est de degré fini sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$

Soit $P = (x_0, y_0)$ un point de $(\mathcal{P})$, alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) = Q(\mathcal{E})(x_0, y_0)$ est une extension de $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$.

Proposition 3

On suppose que P est constructible en une étape. Alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big)$ est de degré fini sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ et

$$[\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) : \mathbb{Q}(\mathcal{E})] \in \{1; 2\},$$

Soit $P = (x_0, y_0)$ un point de $(\mathcal{P})$, alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) = Q(\mathcal{E})(x_0, y_0)$ est une extension de $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$.

Proposition 3

On suppose que P est constructible en une étape. Alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big)$ est de degré fini sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ et

$$[\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) : \mathbb{Q}(\mathcal{E})] \in \{1; 2\},$$

La preuve de la proposition 3 utilise :

II. Constructibilité et extensions de corps

Soit $P = (x_0, y_0)$ un point de $(\mathcal{P})$, alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) = Q(\mathcal{E})(x_0, y_0)$ est une extension de $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$.

Proposition 3

On suppose que P est constructible en une étape. Alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big)$ est de degré fini sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ et

$$[\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) : \mathbb{Q}(\mathcal{E})] \in \{1; 2\},$$

La preuve de la proposition 3 utilise :

Lemme 4

1. Soit $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$.

Soit $P = (x_0, y_0)$ un point de $(\mathcal{P})$, alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) = Q(\mathcal{E})(x_0, y_0)$ est une extension de $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$.

Proposition 3

On suppose que P est constructible en une étape. Alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big)$ est de degré fini sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ et

$$[\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) : \mathbb{Q}(\mathcal{E})] \in \{1; 2\},$$

La preuve de la proposition 3 utilise :

Lemme 4

1. Soit $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$. Alors l'équation de $\mathcal{D}$ est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{Q}(\mathcal{E})$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

II. Constructibilité et extensions de corps

Soit $P = (x_0, y_0)$ un point de $(\mathcal{P})$, alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) = Q(\mathcal{E})(x_0, y_0)$ est une extension de $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$.

Proposition 3

On suppose que P est constructible en une étape. Alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big)$ est de degré fini sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ et

$$[\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) : \mathbb{Q}(\mathcal{E})] \in \{1; 2\},$$

La preuve de la proposition 3 utilise :

Lemme 4

1. Soit $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$. Alors l'équation de $\mathcal{D}$ est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{Q}(\mathcal{E})$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.
2. Soit $\mathcal{C} \in \mathcal{C}_{\mathcal{E}}$.

Soit $P = (x_0, y_0)$ un point de $(\mathcal{P})$, alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) = Q(\mathcal{E})(x_0, y_0)$ est une extension de $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$.

Proposition 3

On suppose que P est constructible en une étape. Alors $\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big)$ est de degré fini sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ et

$$[\mathbb{Q}\big(\mathcal{E} \cup \{P\}\big) : \mathbb{Q}(\mathcal{E})] \in \{1; 2\},$$

La preuve de la proposition 3 utilise :

Lemme 4

1. Soit $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$. Alors l'équation de $\mathcal{D}$ est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{Q}(\mathcal{E})$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.
2. Soit $\mathcal{C} \in \mathcal{C}_{\mathcal{E}}$. Alors l'équation de $\mathcal{C}$ est de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{Q}(\mathcal{E})$ tels que $(a, b, c) \neq 0$.

II. Constructibilité et extensions de corps

Corollaire 5

Supposons que le point P soit constructible en $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 5

Supposons que le point P soit constructible en $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_n,$$

de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

Corollaire 5

Supposons que le point P soit constructible en $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_n,$$

de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,

Corollaire 5

Supposons que le point P soit constructible en $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_n,$$

de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $x_0, y_0 \in K_n$,

Corollaire 5

Supposons que le point P soit constructible en $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_n,$$

de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $x_0, y_0 \in K_n$,
- si $n \geq 1$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $[K_i : K_{i-1}] \in \{1; 2\}$.

Corollaire 5

Supposons que le point P soit constructible en $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_n,$$

de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $x_0, y_0 \in K_n$,
- si $n \geq 1$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $[K_i : K_{i-1}] \in \{1; 2\}$.

Corollaire 6 (Critère de Wantzel)

II. Constructibilité et extensions de corps

Corollaire 5

Supposons que le point P soit constructible en $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_n,$$

de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $x_0, y_0 \in K_n$,
- si $n \geq 1$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $[K_i : K_{i-1}] \in \{1; 2\}$.

Corollaire 6 (Critère de Wantzel)

Si P est constructible alors x_0, y_0 sont algébriques sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$

II. Constructibilité et extensions de corps

Corollaire 5

Supposons que le point P soit constructible en $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_n,$$

de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $x_0, y_0 \in K_n$,
- si $n \geq 1$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $[K_i : K_{i-1}] \in \{1; 2\}$.

Corollaire 6 (Critère de Wantzel)

Si P est constructible alors x_0, y_0 sont algébriques sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ de degré une puissance de 2.

Corollaire 5

Supposons que le point P soit constructible en $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_n,$$

de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $x_0, y_0 \in K_n$,
- si $n \geq 1$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $[K_i : K_{i-1}] \in \{1; 2\}$.

Corollaire 6 (Critère de Wantzel)

Si P est constructible alors x_0, y_0 sont algébriques sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ de degré une puissance de 2.

Remarques :

- Toute fraction rationnelle α en x_0, y_0 est algébrique sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$

Corollaire 5

Supposons que le point P soit constructible en $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_n,$$

de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $x_0, y_0 \in K_n$,
- si $n \geq 1$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $[K_i : K_{i-1}] \in \{1; 2\}$.

Corollaire 6 (Critère de Wantzel)

Si P est constructible alors x_0, y_0 sont algébriques sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ de degré une puissance de 2.

Remarques :

- Toute fraction rationnelle α en x_0, y_0 est algébrique sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ de degré une puissance de 2,

Corollaire 5

Supposons que le point P soit constructible en $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_n,$$

de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $x_0, y_0 \in K_n$,
- si $n \geq 1$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $[K_i : K_{i-1}] \in \{1; 2\}$.

Corollaire 6 (Critère de Wantzel)

Si P est constructible alors x_0, y_0 sont algébriques sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ de degré une puissance de 2.

Remarques :

- Toute fraction rationnelle α en x_0, y_0 est algébrique sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ de degré une puissance de 2, ainsi que $\sqrt{\alpha}$ si $\alpha \geq 0$.

Corollaire 5

Supposons que le point P soit constructible en $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_n,$$

de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $x_0, y_0 \in K_n$,
- si $n \geq 1$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $[K_i : K_{i-1}] \in \{1; 2\}$.

Corollaire 6 (Critère de Wantzel)

Si P est constructible alors x_0, y_0 sont algébriques sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ de degré une puissance de 2.

Remarques :

- Toute fraction rationnelle α en x_0, y_0 est algébrique sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ de degré une puissance de 2, ainsi que $\sqrt{\alpha}$ si $\alpha \geq 0$.
- La réciproque du critère de Wantzel est fausse !

Corollaire 7

Corollaire 7

- La quadrature du cercle n'est pas réalisable à la règle et au compas.

Corollaire 7

- La quadrature du cercle n'est pas réalisable à la règle et au compas.
- La duplication du cube n'est pas réalisable à la règle et au compas.

III. Critère suffisant de constructibilité

Théorème 8

Supposons qu'il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_m,$$

$m \in \mathbb{N}$, de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

III. Critère suffisant de constructibilité

Théorème 8

Supposons qu'il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_m,$$

$m \in \mathbb{N}$, de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,

Théorème 8

Supposons qu'il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_m,$$

$m \in \mathbb{N}$, de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $x_0, y_0 \in K_m$,

Théorème 8

Supposons qu'il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_m,$$

$m \in \mathbb{N}$, de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $x_0, y_0 \in K_m$,
- si $m \geq 1$, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $[K_i : K_{i-1}] \in \{1; 2\}$.

III. Critère suffisant de constructibilité

Théorème 8

Supposons qu'il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_m,$$

$m \in \mathbb{N}$, de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $x_0, y_0 \in K_m$,
- si $m \geq 1$, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $[K_i : K_{i-1}] \in \{1; 2\}$.

Alors P est constructible.

La preuve du théorème 8 repose sur :

La preuve du théorème 8 repose sur :

Lemme 9

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

La preuve du théorème 8 repose sur :

Lemme 9

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Le point (x, y) est constructible ssi les points $(x, 0)$ et $(0, y)$.

La preuve du théorème 8 repose sur :

Lemme 9

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Le point (x, y) est constructible ssi les points $(x, 0)$ et $(0, y)$.
2. Le point $(x, 0)$ est constructible ssi le point $(0, x)$ est constructible.

La preuve du théorème 8 repose sur :

Lemme 9

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Le point (x, y) est constructible ssi les points $(x, 0)$ et $(0, y)$.
2. Le point $(x, 0)$ est constructible ssi le point $(0, x)$ est constructible.
3. Supposons que les points $(x, 0)$ et $(y, 0)$ soient constructibles, alors :

La preuve du théorème 8 repose sur :

Lemme 9

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Le point (x, y) est constructible ssi les points $(x, 0)$ et $(0, y)$.
2. Le point $(x, 0)$ est constructible ssi le point $(0, x)$ est constructible.
3. Supposons que les points $(x, 0)$ et $(y, 0)$ soient constructibles, alors :
    1. le point $(-x, 0)$ est constructible,

La preuve du théorème 8 repose sur :

Lemme 9

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Le point (x, y) est constructible ssi les points $(x, 0)$ et $(0, y)$.
2. Le point $(x, 0)$ est constructible ssi le point $(0, x)$ est constructible.
3. Supposons que les points $(x, 0)$ et $(y, 0)$ soient constructibles, alors :
    1. le point $(-x, 0)$ est constructible,
    2. le point $(x + y, 0)$ est constructible,

La preuve du théorème 8 repose sur :

Lemme 9

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Le point (x, y) est constructible ssi les points $(x, 0)$ et $(0, y)$.
2. Le point $(x, 0)$ est constructible ssi le point $(0, x)$ est constructible.
3. Supposons que les points $(x, 0)$ et $(y, 0)$ soient constructibles, alors :
    1. le point $(-x, 0)$ est constructible,
    2. le point $(x + y, 0)$ est constructible,
    3. le point $(xy, 0)$ est constructible,

La preuve du théorème 8 repose sur :

Lemme 9

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Le point (x, y) est constructible ssi les points $(x, 0)$ et $(0, y)$.
2. Le point $(x, 0)$ est constructible ssi le point $(0, x)$ est constructible.
3. Supposons que les points $(x, 0)$ et $(y, 0)$ soient constructibles, alors :
   1. le point $(-x, 0)$ est constructible,
   2. le point $(x + y, 0)$ est constructible,
   3. le point $(xy, 0)$ est constructible,
   4. si $x \neq 0$, le point $\left(\frac{1}{x}, 0\right)$ est constructible.

Finalement :

Finalement :

Théorème 10

Le point P est constructible à partir de $\mathcal{E}$ ss'il existe une suite finie croissante

$$K_0 \subset \cdots \subset K_m,$$

$m \in \mathbb{N}$, de sous-corps de $\mathbb{R}$ telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $x_0, y_0 \in K_m$,
- si $m \geq 1$, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $[K_i : K_{i-1}] \in \{1; 2\}$.

IV. Application au problème de la trisection de l'angle

Soit $C \notin [OA)$

IV. Application au problème de la trisection de l'angle

Soit $C \notin [OA)$ et soit θ la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$.

IV. Application au problème de la trisection de l'angle

Soit $C \notin [OA)$ et soit θ la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$. Notons $D = \big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$.

Soit $C \notin [OA]$ et soit θ la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$. Notons $D = \big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$.

Définition 11

On dit que l'angle $\widehat{AOC}$ est trisectable à la règle et au compas

Soit $C \notin [OA]$ et soit θ la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$. Notons $D = \big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$.

Définition 11

On dit que l'angle $\widehat{AOC}$ est trisectable à la règle et au compas ssi le point $\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)$ est constructible à partir de $\{A, O, D\}$.

IV. Application au problème de la trisection de l'angle

Soit $C \notin [OA]$ et soit θ la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$. Notons $D = \big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$.

Définition 11

On dit que l'angle $\widehat{AOC}$ est <u>trisectable à la règle et au compas</u> ssi le point $\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)$ est constructible à partir de $\{A, O, D\}$.

Proposition 12

L'angle $\widehat{AOC}$ est trisectable à la règle et au compas

Soit $C \notin [OA]$ et soit θ la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$. Notons $D = \big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$.

Définition 11

On dit que l'angle $\widehat{AOC}$ est trisectable à la règle et au compas ssi le point $\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)$ est constructible à partir de $\{A, O, D\}$.

Proposition 12

L'angle $\widehat{AOC}$ est trisectable à la règle et au compas ssi le polynôme

$$4X^3 - 3X - \cos(\theta)$$

possède une racine dans $\mathbb{Q}\big(\cos(\theta)\big)$.