

Chapitre 3 : Constructibilité à la règle et au compas des polygones réguliers

I. Introduction

On se place dans un plan (\mathcal{P}).

I. Introduction

On se place dans un plan (\mathcal{P}).

Soit \mathcal{E} un ensemble de points du plan contenant deux points distincts O et A et soit B tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

I. Introduction

On se place dans un plan (\mathcal{P}).

Soit \mathcal{E} un ensemble de points du plan contenant deux points distincts O et A et soit B tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$.

I. Introduction

On se place dans un plan (\mathcal{P}).

Soit \mathcal{E} un ensemble de points du plan contenant deux points distincts O et A et soit B tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. On note \mathcal{R}_n le *polygone régulier à n côtés de centre O et de sommet A* .

I. Introduction

On se place dans un plan (\mathcal{P}).

Soit \mathcal{E} un ensemble de points du plan contenant deux points distincts O et A et soit B tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. On note \mathcal{R}_n le *polygone régulier à n côtés de centre O et de sommet A* . Nous allons montrer le résultat suivant :

I. Introduction

On se place dans un plan (\mathcal{P}) .

Soit \mathcal{E} un ensemble de points du plan contenant deux points distincts O et A et soit B tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. On note \mathcal{R}_n le *polygone régulier* à n côtés de centre O et de sommet A . Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème de Gauss-Wantzel

Le polygone régulier \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi

I. Introduction

On se place dans un plan (\mathcal{P}).

Soit \mathcal{E} un ensemble de points du plan contenant deux points distincts O et A et soit B tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. On note \mathcal{R}_n le *polygone régulier* à n côtés de centre O et de sommet A . Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème de Gauss-Wantzel

Le polygone régulier \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi n est le produit d'une puissance de deux et

I. Introduction

On se place dans un plan (\mathcal{P}).

Soit \mathcal{E} un ensemble de points du plan contenant deux points distincts O et A et soit B tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. On note \mathcal{R}_n le *polygone régulier à n côtés de centre O et de sommet A* . Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème de Gauss-Wantzel

Le polygone régulier \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers et deux à deux distincts.

I. Introduction

On se place dans un plan (\mathcal{P}).

Soit \mathcal{E} un ensemble de points du plan contenant deux points distincts O et A et soit B tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. On note \mathcal{R}_n le *polygone régulier à n côtés de centre O et de sommet A* . Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème de Gauss-Wantzel

Le polygone régulier \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers et deux à deux distincts.

Si $m \in \mathbb{N}$, le $m^{\text{ème}}$ nombre de Fermat est le nombre $F_m := 1 + 2^{2^m}$.

II. Nombres complexes constructibles

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

II. Nombres complexes constructibles

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Définition 1

On dit que z est constructible à partir de \mathcal{E} si $(a, b) \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$.

II. Nombres complexes constructibles

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Définition 1

On dit que z est constructible à partir de \mathcal{E} si $(a, b) \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$.

On note $\mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ l'ensemble des nombres complexes constructibles à partir de \mathcal{E} .

II. Nombres complexes constructibles

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Définition 1

On dit que z est constructible à partir de \mathcal{E} si $(a, b) \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$.

On note $\mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ l'ensemble des nombres complexes constructibles à partir de \mathcal{E} .

Proposition 2

$\mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ est un sous-corps de \mathbb{C} contenant $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$.

II. Nombres complexes constructibles

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Définition 1

On dit que z est constructible à partir de \mathcal{E} si $(a, b) \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$.

On note $\mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ l'ensemble des nombres complexes constructibles à partir de \mathcal{E} .

Proposition 2

$\mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ est un sous-corps de \mathbb{C} contenant $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$. De plus, si $z \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ et si $\omega \in \mathbb{C}$ vérifie $\omega^2 = z$, alors $\omega \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$.

II. Nombres complexes constructibles

De la proposition 2 et du critère nécessaire et suffisant de constructibilité à partir de \mathcal{E} , on déduit :

II. Nombres complexes constructibles

De la proposition 2 et du critère nécessaire et suffisant de constructibilité à partir de \mathcal{E} , on déduit :

Théorème 3

$z \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ ss'il existe une suite

$$K_0 \subset \dots \subset K_N,$$

$N \in \mathbb{N}$, de sous-corps de \mathbb{C}

II. Nombres complexes constructibles

De la proposition 2 et du critère nécessaire et suffisant de constructibilité à partir de \mathcal{E} , on déduit :

Théorème 3

$z \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ ss'il existe une suite

$$K_0 \subset \dots \subset K_N,$$

$N \in \mathbb{N}$, de sous-corps de \mathbb{C} telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $z \in K_N$,
- si $N \geq 1$, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $[K_i : K_{i-1}] \in \{1; 2\}$.

II. Nombres complexes constructibles

De la proposition 2 et du critère nécessaire et suffisant de constructibilité à partir de \mathcal{E} , on déduit :

Théorème 3

$z \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ ss'il existe une suite

$$K_0 \subset \dots \subset K_N,$$

$N \in \mathbb{N}$, de sous-corps de \mathbb{C} telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $z \in K_N$,
- si $N \geq 1$, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $[K_i : K_{i-1}] \in \{1; 2\}$.

Corollaire 4 (Critère de Wantzel)

Si $z \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$, alors z est algébrique sur $\mathbb{Q}(\mathcal{E})$ de degré une puissance de deux.

III. Constructibilité du polygone régulier \mathcal{R}_n

III. Constructibilité du polygone régulier \mathcal{R}_n

Lemme 5

\mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi $\zeta_n := e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathcal{F}_{\{O, A\}}$.

III. Constructibilité du polygone régulier \mathcal{R}_n

Lemme 5

\mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi $\zeta_n := e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathcal{F}_{\{O, A\}}$.

Remarque : ζ_n est algébrique sur $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\{O, A\})$.

III. Constructibilité du polygone régulier \mathcal{R}_n

Lemme 5

\mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi $\zeta_n := e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathcal{F}_{\{O, A\}}$.

Remarque : ζ_n est algébrique sur $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\{O, A\})$.

On note

$$\Phi_n := \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} (X - \zeta_n^k) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) \in \mathbb{C}[X]$$

III. Constructibilité du polygone régulier \mathcal{R}_n

Lemme 5

\mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi $\zeta_n := e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathcal{F}_{\{O, A\}}$.

Remarque : ζ_n est algébrique sur $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\{O, A\})$.

On note

$$\Phi_n := \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} (X - \zeta_n^k) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) \in \mathbb{C}[X]$$

le $n^{\text{ème}}$ polynôme cyclotomique.

III. Constructibilité du polygone régulier \mathcal{R}_n

Lemme 5

\mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi $\zeta_n := e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathcal{F}_{\{O, A\}}$.

Remarque : ζ_n est algébrique sur $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\{O, A\})$.

On note

$$\Phi_n := \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} (X - \zeta_n^k) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \in \mathbb{C}[X]$$

le $n^{\text{ème}}$ polynôme cyclotomique.

Faits :

III. Constructibilité du polygone régulier \mathcal{R}_n

Lemme 5

\mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi $\zeta_n := e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathcal{F}_{\{O, A\}}$.

Remarque : ζ_n est algébrique sur $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\{O, A\})$.

On note

$$\Phi_n := \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} (X - \zeta_n^k) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) \in \mathbb{C}[X]$$

le $n^{\text{ème}}$ polynôme cyclotomique.

Faits : $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$

III. Constructibilité du polygone régulier \mathcal{R}_n

Lemme 5

\mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi $\zeta_n := e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathcal{F}_{\{O, A\}}$.

Remarque : ζ_n est algébrique sur $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\{O, A\})$.

On note

$$\Phi_n := \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} (X - \zeta_n^k) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) \in \mathbb{C}[X]$$

le $n^{\text{ème}}$ polynôme cyclotomique.

Faits : $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ et Φ_n est irréductible sur \mathbb{Q} .

III. Constructibilité du polygone régulier \mathcal{R}_n

Lemme 5

\mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi $\zeta_n := e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathcal{F}_{\{O, A\}}$.

Remarque : ζ_n est algébrique sur $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\{O, A\})$.

On note

$$\Phi_n := \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} (X - \zeta_n^k) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \in \mathbb{C}[X]$$

le $n^{\text{ème}}$ polynôme cyclotomique.

Faits : $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ et Φ_n est irréductible sur \mathbb{Q} .

Proposition 6

On a $\mu_{\zeta_n, \mathbb{Q}} = \Phi_n$:

III. Constructibilité du polygone régulier \mathcal{R}_n

Lemme 5

\mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi $\zeta_n := e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathcal{F}_{\{O, A\}}$.

Remarque : ζ_n est algébrique sur $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\{O, A\})$.

On note

$$\Phi_n := \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} (X - \zeta_n^k) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \in \mathbb{C}[X]$$

le $n^{\text{ème}}$ polynôme cyclotomique.

Faits : $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ et Φ_n est irréductible sur \mathbb{Q} .

Proposition 6

On a $\mu_{\zeta_n, \mathbb{Q}} = \Phi_n$: ζ_n est donc algébrique sur \mathbb{Q} de degré $\varphi(n)$

III. Constructibilité du polygone régulier \mathcal{R}_n

Lemme 5

\mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi $\zeta_n := e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathcal{F}_{\{O, A\}}$.

Remarque : ζ_n est algébrique sur $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\{O, A\})$.

On note

$$\Phi_n := \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} (X - \zeta_n^k) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k, n) = 1}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) \in \mathbb{C}[X]$$

le $n^{\text{ème}}$ polynôme cyclotomique.

Faits : $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ et Φ_n est irréductible sur \mathbb{Q} .

Proposition 6

On a $\mu_{\zeta_n, \mathbb{Q}} = \Phi_n$: ζ_n est donc algébrique sur \mathbb{Q} de degré $\varphi(n)$ (où φ est la fonction indicatrice d'Euler).

IV. Théorème de Gauss-Wantzel : sens direct

On commence par montrer :

IV. Théorème de Gauss-Wantzel : sens direct

On commence par montrer :

Proposition 7

Si \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$, alors n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers deux à deux distincts.

IV. Théorème de Gauss-Wantzel : sens direct

On commence par montrer :

Proposition 7

Si \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$, alors n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers deux à deux distincts.

La preuve de la proposition 7 utilise :

IV. Théorème de Gauss-Wantzel : sens direct

On commence par montrer :

Proposition 7

Si \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$, alors n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers deux à deux distincts.

La preuve de la proposition 7 utilise :

Lemme 8

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que l'entier $1 + 2^k$ soit premier.

IV. Théorème de Gauss-Wantzel : sens direct

On commence par montrer :

Proposition 7

Si \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$, alors n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers deux à deux distincts.

La preuve de la proposition 7 utilise :

Lemme 8

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que l'entier $1 + 2^k$ soit premier. Alors k est une puissance de 2 et $1 + 2^k$ est donc un nombre de Fermat.

V. Théorème de Gauss-Wantzel : sens réciproque

Nous allons ensuite partiellement montrer :

V. Théorème de Gauss-Wantzel : sens réciproque

Nous allons ensuite partiellement montrer :

Théorème 9

Si n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers deux à deux distincts, alors \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$.

V. Théorème de Gauss-Wantzel : sens réciproque

Preuve :

V. Théorème de Gauss-Wantzel : sens réciproque

Preuve : On suppose que

$$n = 2^d \prod_{s=1}^M F_{m_s},$$

avec $d \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ deux à deux distincts et, pour tout $s \in \{1, \dots, M\}$, F_{m_s} premier.

V. Théorème de Gauss-Wantzel : sens réciproque

Preuve : On suppose que

$$n = 2^d \prod_{s=1}^M F_{m_s},$$

avec $d \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ deux à deux distincts et, pour tout $s \in \{1, \dots, M\}$, F_{m_s} premier.

On a :

V. Théorème de Gauss-Wantzel : sens réciproque

Preuve : On suppose que

$$n = 2^d \prod_{s=1}^M F_{m_s},$$

avec $d \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ deux à deux distincts et, pour tout $s \in \{1, \dots, M\}$, F_{m_s} premier.

On a :

Lemme 10

Soient k_1 et k_2 deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.

V. Théorème de Gauss-Wantzel : sens réciproque

Preuve : On suppose que

$$n = 2^d \prod_{s=1}^M F_{m_s},$$

avec $d \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ deux à deux distincts et, pour tout $s \in \{1, \dots, M\}$, F_{m_s} premier.

On a :

Lemme 10

Soient k_1 et k_2 deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Alors $\zeta_{k_1 k_2} \in \mathcal{F}_{\{0,A\}}$ ssi $\zeta_{k_1}, \zeta_{k_2} \in \mathcal{F}_{\{0,A\}}$.

V. Théorème de Gauss-Wantzel : sens réciproque

Preuve : On suppose que

$$n = 2^d \prod_{s=1}^M F_{m_s},$$

avec $d \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ deux à deux distincts et, pour tout $s \in \{1, \dots, M\}$, F_{m_s} premier.

On a :

Lemme 10

Soient k_1 et k_2 deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Alors $\zeta_{k_1 k_2} \in \mathcal{F}_{\{0, A\}}$ ssi $\zeta_{k_1}, \zeta_{k_2} \in \mathcal{F}_{\{0, A\}}$.

Et :

V. Théorème de Gauss-Wantzel : sens réciproque

Preuve : On suppose que

$$n = 2^d \prod_{s=1}^M F_{m_s},$$

avec $d \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ deux à deux distincts et, pour tout $s \in \{1, \dots, M\}$, F_{m_s} premier.

On a :

Lemme 10

Soient k_1 et k_2 deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Alors $\zeta_{k_1 k_2} \in \mathcal{F}_{\{0, A\}}$ ssi $\zeta_{k_1}, \zeta_{k_2} \in \mathcal{F}_{\{0, A\}}$.

Et :

Lemme 11

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\zeta_{2^m} \in \mathcal{F}_{\{0, A\}}$.

V. Théorème de Gauss-Wantzel : sens réciproque

On est ainsi ramené à montrer :

V. Théorème de Gauss-Wantzel : sens réciproque

On est ainsi ramené à montrer :

Théorème 12

Soit p un entier de Fermat premier, alors $\zeta_p \in \mathcal{F}_{\{0,A\}}$.

V. Théorème de Gauss-Wantzel : sens réciproque

On est ainsi ramené à montrer :

Théorème 12

Soit p un entier de Fermat premier, alors $\zeta_p \in \mathcal{F}_{\{0,A\}}$.

La démonstration du théorème 12 utilise des outils de la théorie de Galois,

V. Théorème de Gauss-Wantzel : sens réciproque

On est ainsi ramené à montrer :

Théorème 12

Soit p un entier de Fermat premier, alors $\zeta_p \in \mathcal{F}_{\{0,A\}}$.

La démonstration du théorème 12 utilise des outils de la théorie de Galois, ainsi que le théorème 3 :

Théorème 3

$z \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ ss'il existe une suite

$$K_0 \subset \cdots \subset K_N,$$

$N \in \mathbb{N}$, de sous-corps de \mathbb{C} telle que

- $K_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$,
- $z \in K_N$,
- si $N \geq 1$, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $[K_i : K_{i-1}] \in \{1; 2\}$.

VIII. Théorème de Gauss-Wantzel

VIII. Théorème de Gauss-Wantzel

Théorème de Gauss-Wantzel

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. Le polygone régulier \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers et deux à deux distincts.

Exemples :

VIII. Théorème de Gauss-Wantzel

Théorème de Gauss-Wantzel

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. Le polygone régulier \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers et deux à deux distincts.

Exemples :

- Le triangle équilatéral est constructible.

VIII. Théorème de Gauss-Wantzel

Théorème de Gauss-Wantzel

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. Le polygone régulier \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers et deux à deux distincts.

Exemples :

- Le triangle équilatéral est constructible.
- Le carré est constructible.

VIII. Théorème de Gauss-Wantzel

Théorème de Gauss-Wantzel

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. Le polygone régulier \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers et deux à deux distincts.

Exemples :

- Le triangle équilatéral est constructible.
- Le carré est constructible.
- Le pentagone régulier est constructible.

VIII. Théorème de Gauss-Wantzel

Théorème de Gauss-Wantzel

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. Le polygone régulier \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers et deux à deux distincts.

Exemples :

- Le triangle équilatéral est constructible.
- Le carré est constructible.
- Le pentagone régulier est constructible.
- L'hexagone régulier est constructible.

VIII. Théorème de Gauss-Wantzel

Théorème de Gauss-Wantzel

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. Le polygone régulier \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers et deux à deux distincts.

Exemples :

- Le triangle équilatéral est constructible.
- Le carré est constructible.
- Le pentagone régulier est constructible.
- L'hexagone régulier est constructible.
- L'heptagone régulier n'est pas constructible.

VIII. Théorème de Gauss-Wantzel

Théorème de Gauss-Wantzel

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. Le polygone régulier \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers et deux à deux distincts.

Exemples :

- Le triangle équilatéral est constructible.
- Le carré est constructible.
- Le pentagone régulier est constructible.
- L'hexagone régulier est constructible.
- L'heptagone régulier n'est pas constructible.
- L'octogone régulier est constructible.

VIII. Théorème de Gauss-Wantzel

Théorème de Gauss-Wantzel

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. Le polygone régulier \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers et deux à deux distincts.

Exemples :

- Le triangle équilatéral est constructible.
- Le carré est constructible.
- Le pentagone régulier est constructible.
- L'hexagone régulier est constructible.
- L'heptagone régulier n'est pas constructible.
- L'octogone régulier est constructible.
- Le nonagone (ou ennéagone) régulier n'est pas constructible.

VIII. Théorème de Gauss-Wantzel

Théorème de Gauss-Wantzel

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$. Le polygone régulier \mathcal{R}_n est constructible à partir de $\{O, A\}$ ssi n est le produit d'une puissance de deux et de nombres de Fermat premiers et deux à deux distincts.

Exemples :

- Le triangle équilatéral est constructible.
- Le carré est constructible.
- Le pentagone régulier est constructible.
- L'hexagone régulier est constructible.
- L'heptagone régulier n'est pas constructible.
- L'octogone régulier est constructible.
- Le nonagone (ou ennéagone) régulier n'est pas constructible.
- Le décagone régulier est constructible.

VIII. Théorème de Gauss-Wantzel

Exemples :

- Le hendécagone régulier n'est pas constructible.
- Le dodécagone régulier est constructible.
- Le tridécagone régulier n'est pas constructible.
- Le tétradécagone régulier n'est pas constructible.
- Le pentadécagone régulier est constructible.
- L'hexadécagone régulier est constructible.
- L'heptadécagone régulier est constructible.
- L'octadécagone régulier n'est pas constructible.
- L'ennéadécagone régulier n'est pas constructible.
- L'icosagone régulier est constructible.