Feuille de TD 4 : Courbes paramétrées

Exercice 1 On considère la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \big(\sin(2t), \sin(3t)\big)$.

1. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   (a) $\gamma(t + 2\pi) = \gamma(t)$,
   (b) $\gamma(-t)$ est le symétrique du point $\gamma(t)$ par rapport au point $(0, 0)$,
   (c) $\gamma(\pi - t)$ est le symétrique du point $\gamma(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées,
   (d) $\gamma(t + \pi)$ est le symétrique du point $\gamma(t)$ par rapport à l'axe des abscisses.
2. Montrer que la courbe paramétrée γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est régulière i.e. pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma'(t) \neq \overrightarrow{0}$.
3. On note $x : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$; $t \mapsto \sin(2t)$ et $y : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$; $t \mapsto \sin(3t)$. Dresser le tableau des variations de x et y.
4. Construire la courbe C_γ.

Exercice 2 On considère la paramétrisation

$$\rho : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \left(\frac{\cos(\theta)}{1+\sin^2(\theta)}, \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{1+\sin^2(\theta)}\right) \end{array}$$

du lemniscate de Bernoulli privé de l'origine.

1. Montrer que la courbe paramétrée ρ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer que ρ est $\mathcal{C}^\infty$-équivalente à la courbe paramétrée

$$\gamma : \begin{array}{ccc}]-\pi, \pi[& \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \left(\frac{\sin(\theta)}{1+\cos^2(\theta)}, \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{1+\cos^2(\theta)}\right) \end{array}$$

3. Montrer que ρ est $\mathcal{C}^\infty$-équivalente à la courbe paramétrée

$$\eta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(\frac{t+t^3}{1+t^4}, \frac{t-t^3}{1+t^4}\right) \end{array}$$

Exercice 3

1. Montrer que la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \left(t^5, t^3\right)$ possède un point d'inflexion en 0.
2. Montrer que la courbe paramétrée $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \left(2t^2, t^2 - t^3\right)$ possède un point de rebroussement de première espèce en 0.
3. Montrer que la courbe paramétrée $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \left(1 + t^2 + \frac{t^3}{2}, t^2 + \frac{t^3}{2} + 2t^4\right)$ possède un point de rebroussement de deuxième espèce en 0.

Exercice 4 Montrer que la courbe paramétrée

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0; +\infty[& \mapsto & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, \sqrt{t}) \end{array}$$

possède un vecteur tangent en 0, bien que la fonction racine carrée ne soit pas dérivable en 0.

Exercice 5 On considère la courbe paramétrée

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{cases} \left(t^4 \cos\left(\frac{1}{t}\right), t^4 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) & \text{si } t \neq 0, \\ (0,0) & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que γ est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer que le point $\gamma(0)$ de la courbe C_γ est simple.
3. Montrer que γ ne possède pas de vecteur tangent en 0.

Exercice 6 Soient $R \in]0; +\infty[$ et $\omega \in]0; +\infty[$. On considère la courbe paramétrée

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \left[0; \frac{2\pi}{\omega}\right] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), R\omega t) \end{array}$$

de $\mathbb{R}^3$ dont le support est une courbe *hélicoïdale* de rayon R.

1. Justifier que γ est rectifiable et déterminer la longueur de γ.
2. Déterminer ω pour que γ soit une courbe paramétrée normale.

Exercice 7 Soit $R \in]0;+\infty[$. On considère la courbe paramétrée plane

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (Rt - R\sin(t), R - R\cos(t)) \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma\left(t + 2\pi\right) = \gamma(t) + (2\pi R, 0)$.
2. Étudier la courbe paramétrée restreinte $\gamma_{|[0;2\pi]}$.
3. Construire la courbe C_γ (appelée *cycloïde*)
4. Montrer que la courbe paramétrée $\gamma_{|[0;2\pi]}$ est rectifiable et déterminer la longueur $L(\gamma_{|[0;2\pi]})$.
5. Montrer que la courbe paramétrée $\gamma_{|]0;2\pi[}$ est régulière et déterminer l'abscisse curviligne de $\gamma_{|]0;2\pi[}$ en π.
6. En déduire une reparamétrisation normale de $\gamma_{|]0;2\pi[}$.
7. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Déterminer la courbure de C_γ en $\gamma(t)$, le repère de Frenet de C_γ en $\gamma(t)$ ainsi que le cercle osculateur de C_γ en $\gamma(t)$.
8. Montrer que le centre de courbure de γ en $\gamma(t)$ est le point $\gamma(t - \pi) + (\pi R, -2R)$.

Exercice 8 On considère la courbe paramétrée plane

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [-2;2] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(\frac{1}{3}t^3 - t, t^2 - 1\right) \end{array}$$

1. Étudier et construire la courbe C_γ.
2. Montrer que la courbe paramétrée γ est rectifiable et calculer sa longueur.
3. Montrer que γ est régulière et déterminer l'abscisse curviligne de γ en 0.
4. Pour $t \in [-2;2] \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$, déterminer la courbure $\kappa\big(\gamma(t)\big)$ de C_γ en $\gamma(t)$. En quel(s) point(s) t de $[-2;2] \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ la courbure $\kappa\big(\gamma(t)\big)$ est-elle maximale ?
5. Pour tout $t \in [-2;2] \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$, déterminer le repère de Frenet de C_γ en $\gamma(t)$ ainsi que le cercle osculateur de C_γ en $\gamma(t)$.