Feuille de TD 4 : Courbes paramétrées

Exercice 1 On considère la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \big(\sin(2t), \sin(3t)\big)$.

1. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   (a) $\gamma(t+2\pi) = \gamma(t)$,
   (b) $\gamma(-t)$ est le symétrique du point $\gamma(t)$ par rapport au point $(0,0)$,
   (c) $\gamma(\pi - t)$ est le symétrique du point $\gamma(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées,
   (d) $\gamma(t+\pi)$ est le symétrique du point $\gamma(t)$ par rapport à l'axe des abscisses.
2. Déterminer les points multiples de $C_{\gamma_{|[-\pi,\pi]}}$ d'ordonnée nulle.
3. Montrer que la courbe paramétrée γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est régulière i.e. pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma'(t) \neq \overrightarrow{0}$.
4. Montrer que γ possède un point d'inflexion en 0.
5. On note $x : \big[0; \frac{\pi}{2}\big] \to \mathbb{R}$; $t \mapsto \sin(2t)$ et $y : \big[0; \frac{\pi}{2}\big] \to \mathbb{R}$; $t \mapsto \sin(3t)$. Dresser le tableau des variations de x et y.
6. Montrer que, si $t \in \big]0; \frac{\pi}{2}\big]$, $\gamma''(t) \notin \mathrm{Vect}\{\gamma'(t)\}$ (on pourra penser à montrer que les vecteurs $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ et $\gamma''(t) = (x''(t), y''(t))$ sont linéairement indépendants).
7. Construire la courbe C_γ.

Exercice 2 On considère la paramétrisation

$$\rho : \begin{array}{ccc} \big]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big[& \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \left(\frac{\cos(\theta)}{1+\sin^2(\theta)}, \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{1+\sin^2(\theta)}\right) \end{array}$$

du lemniscate de Bernoulli privé de l'origine.

1. Montrer que la courbe paramétrée ρ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer que ρ est $\mathcal{C}^\infty$-équivalente à la courbe paramétrée

$$\gamma : \begin{array}{ccc}]-\pi, \pi[& \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \left(\frac{\sin(\theta)}{1+\cos^2(\theta)}, \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{1+\cos^2(\theta)}\right) \end{array}$$

3. Montrer que ρ est $\mathcal{C}^\infty$-équivalente à la courbe paramétrée

$$\eta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(\frac{t+t^3}{1+t^4}, \frac{t-t^3}{1+t^4}\right) \end{array}$$

Exercice 3 1. Montrer que la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \left(t^5, t^3\right)$ possède un point d'inflexion en 0 et construire la courbe C_γ.

2. Montrer que la courbe paramétrée $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \left(2t^2, t^2 - t^3\right)$ possède un point de rebroussement de première espèce en 0 et construire la courbe C_η.

3. Montrer que la courbe paramétrée $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \left(1 + t^2 + \frac{t^3}{2}, t^2 + \frac{t^3}{2} + 2t^4\right)$ possède un point de rebroussement de deuxième espèce en 0 et construire la courbe C_ρ.

Exercice 4 Montrer que la courbe paramétrée

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0; +\infty[& \mapsto & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, \sqrt{t}) \end{array}$$

possède un vecteur tangent en 0, bien que la fonction racine carrée ne soit pas dérivable en 0.

Exercice 5 On considère la courbe paramétrée

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{cases} \left(t^4 \cos\left(\frac{1}{t}\right), t^4 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) & \text{si } t \neq 0, \\ (0,0) & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que γ est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Montrer que le point $\gamma(0)$ de la courbe C_γ est simple.

3. Montrer que γ ne possède pas de vecteur tangent en 0.

Exercice 6 On considère un plan $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthonormé direct dans lequel les coordonnées sont notées (x, y). On considère ensuite une roue circulaire de rayon $R \in]0; +\infty[$ sur laquelle on a planté un clou. On place cette roue dans le demi-plan supérieur $\{y \geq 0\}$ en posant le clou au point $(0, 0)$, puis on la fait rouler à une vitesse constante $v \in]0; +\infty[$ sur la demi-droite $\{x \geq 0\}$ (v est la vitesse du centre de la roue). On souhaite déterminer la trajectoire de la tête du clou dans le plan $(\mathcal{P})$.

1. On note t le temps passé depuis le départ de la roue et $(x(t), y(t))$ les coordonnées de la tête du clou à l'instant t. Montrer que, si ω désigne la quantité $\frac{v}{R}$, on a, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $x(t) = R\omega t - R\sin(\omega t)$ et $y(t) = R - R\cos(\omega t)$.

2. On note γ la courbe paramétrée

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

Montrer que pour tout $t \in [0; +\infty[$, $\gamma\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \gamma(t) + (2\pi R, 0)$.

3. Après avoir justifié que γ était de classe $\mathcal{C}^\infty$, déterminer les points singuliers de γ.
4. Montrer que tous les points réguliers de γ sont des points ordinaires et que tous les points singuliers de γ sont des points de rebroussement de première espèce.
5. Etudier la courbe paramétrée restreinte

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \left[0; \frac{2\pi}{\omega}\right] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

6. Construire la trajectoire du clou (appelée *cycloïde*).
7. Déterminer la distance que parcourt la tête du clou entre deux instants consécutifs où elle touche le sol.

Exercice 7 Soient $R \in]0; +\infty[$ et $\omega \in]0; +\infty[$. On considère la courbe paramétrée

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \left[0; \frac{2\pi}{\omega}\right] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), R\omega t) \end{array}$$

de $\mathbb{R}^3$ dont le support est une courbe *hélicoïdale* de rayon R.

1. Justifier que γ est rectifiable et déterminer la longueur de γ.
2. Déterminer ω pour que γ soit une courbe paramétrée normale.

Exercice 8 On considère la courbe paramétrée

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \left[0; \frac{1}{2}\right] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(t, \sqrt{1-t^2}\right) \end{array}$$

1. Après avoir justifié que γ est de classe $\mathcal{C}^1$, déterminer l'abscisse curviligne de γ à partir de 0.
2. Montrer que γ est régulière.
3. Déterminer une paramétrisation normale de C_γ par longueurs d'arc.

Exercice 9 Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^d$. Montrer que γ est rectifiable et $L(\gamma) = 0$ ssi γ est *stationnaire* i.e. γ est constante.