Feuille de TD 3 : Constructibilité à la règle et au compas des polygones réguliers

Pour les exercices de cette feuille, on se place dans un plan $(\mathcal{P})$ et on considère trois points deux à deux distincts O, A et C de $(\mathcal{P})$. On considère également le point B de $(\mathcal{P})$ tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal direct. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

Par ailleurs, dans cette feuille, "construire à la règle et au compas" signifie "construire à partir de O et A".

Exercice 1

1. Montrer que le nombre complexe $-7+\frac{i}{5}$ est constructible à partir de $\{O, A\}$.
2. Montrer que le nombre complexe $\sqrt{3}+i\sqrt[8]{2}$ est constructible à partir de $\{O, A\}$.
3. Montrer que les racines (dans $\mathbb{C}$) du polynôme X^3-2 ne sont pas constructibles à partir de $\{O, A\}$.

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $\Phi_n := \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k,n)=1}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ le $n^{\text{ème}}$ polynôme cyclotomique.

1. Déterminer les formes "développées" des polynômes cyclotomiques Φ_1, Φ_2, Φ_3 et Φ_4.
2. Montrer que si $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est un nombre premier, alors
$$\Phi_p = 1 + X + \ldots + X^{p-1}.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que
$$X^n - 1 = \prod_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \mid n}} \Phi_d.$$
4. Déterminer la forme "développée" du $6^{\text{ème}}$ polynôme cyclotomique.

Exercice 3 On considère la fonction indicatrice d'Euler

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \setminus \{0\} & \mapsto & \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ n & \mapsto & \text{Card}\left(\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid \text{pgcd}(k, n) = 1\}\right) \end{array}$$

1. Montrer que si $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est un nombre premier et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ deux entiers premiers entre eux. Montrer que l'application
$$f : \mathbb{Z}/(ab)\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\ ;\ \overline{x} \mapsto (\widetilde{x}, \widehat{x})$$
est bien définie et est un isomorphisme d'anneaux.

3. En déduire que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

4. En déduire que si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et si $n = \prod_{r=1}^{N} p_r^{\nu_r}$ est la décomposition de n en facteurs premiers (où, pour tout $r \in \{1, \ldots, N\}$, $\nu_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), on a
$$\varphi(n) = \prod_{r=1}^{N} p_r^{\nu_r - 1}(p_r - 1).$$

Exercice 4 1. Construire à la règle et au compas le triangle équilatéral dont le centre est en O et un des sommets est en A.

2. Construire à la règle et au compas l'hexagone régulier dont le centre est en O et un des sommets est en A.

3. En utilisant les racines cinquièmes de l'unité ainsi que l'expression classique de $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ si $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du polynôme $P := 8X^4 - 8X^2 - X + 1$.

4. En remarquant que 1 et $-\frac{1}{2}$ sont également racines de P, montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine d'un polynôme de degré 2 que l'on déterminera.

5. En déduire une expression de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ à l'aide d'une racine carré.

6. Construire à la règle et au compas le pentagone régulier dont le centre est en O et un des sommets est en A.

7. Construire à la règle et au compas le décagone régulier dont le centre est en O et un des sommets est en A.