Feuille de TD 2 : Constructibilité à la règle et au compas

Pour les exercices de cette feuille, on se place dans un plan $(\mathcal{P})$ et on considère trois points deux à deux distincts O, A et C de $(\mathcal{P})$. On considère également le point B de $(\mathcal{P})$ tel que le triplet (O, A, B) forme un repère orthonormal direct. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

Par ailleurs, dans cette feuille, "construire à la règle et au compas" signifie "construire à partir de O et A".

Exercice 1

1. Montrer que le point symétrique de C par rapport à la droite (OA) est constructible à partir de $\{O, A, C\}$.
2. Montrer que le projeté orthogonal de C sur la droite (OA) est constructible à partir de $\{O, A, C\}$.
3. Soit D le point de $(\mathcal{P})$ tel que le quadrilatère $OACD$ est un parallélogramme. Montrer que D est constructible à partir de $\{O, A, C\}$.

Exercice 2

1. Construire à la règle et au compas le point B.
2. Construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt{2}$.
3. Soit l un réel strictement positif. On note M le milieu du segment délimité par le point A et le point de coordonnées $(l, 0)$. Montrer que le point de coordonnées $(1, \sqrt{l})$ est à l'intersection de la droite d'équation $x = 1$ et du cercle de centre M et de rayon $[MO]$, et en déduire une construction, à partir des points O, A et $(l, 0)$, d'un segment de longueur $\sqrt{l}$.
4. Construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt[4]{2}$.
5. Montrer que l'on peut construire à la règle et au compas un segment de longueur l ssi le point de coordonnées $(l, 0)$ est constructible à partir de $\{O, A\}$.

Exercice 3 Soient $s, p \in]0; +\infty[$ et notons S le point de coordonnées (s, p). Le but de l'exercice est de montrer que lorsque le polynôme $P := X^2 - sX + p \in \mathbb{R}[X]$ possède des racines réelles x_1 et x_2, il est possible de construire des segments de longueurs respectives x_1 et x_2 à partir de $\{O, A, S\}$.

1. Montrer que, si elles existent, les racines réelles de P sont strictement positives.
2. Exprimer s et p en fonction de x_1 et x_2.
3. Montrer que le point M de coordonnées $(p, 0)$ et le point N de coordonnées $(s, 0)$ sont constructibles à partir de $\{O, A, S\}$.

4. Montrer que le point T de coordonnées $(0, \sqrt{p})$ est constructible à partir de $\{O, A, S\}$.
5. On note U le milieu du segment $[ON]$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre U et de rayon $\frac{s}{2}$. Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ est constructible à partir de $\{O, A, S\}$.
6. On note $\mathcal{D}$ la droite parallèle à (OA) passant par T. Sous quelle condition nécessaire et suffisante le cercle $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ s'intersectent-ils ?
7. On suppose cette condition réalisée et soit alors Z un point à l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$. On note a l'abscisse de Z. Montrer que a est une racine de P.
8. Comment peut-on construire l'autre racine de P en une seule étape supplémentaire ?
9. Construire à la règle et au compas les racines réelles du polynôme $X^2 - 5X + 2$.

Exercice 4 1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que P possède une racine $\frac{p}{q}$ dans $\mathbb{Q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ et p et q premiers entre eux. Montrer que p divise a_0 et q divise a_n (dans $\mathbb{Z}$).

2. Montrer que le polynôme $Q := X^3 + 2X^2 - X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
3. Montrer que Q possède au moins une racine réelle.
4. Soit α une racine réelle de Q. Montrer que le point de coordonnées $(\alpha, 0)$ n'est pas constructible à la règle et au compas.

Exercice 5 Le but de l'exercice est de montrer que la réciproque du critère de Wantzel est fausse.

Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier et notons $P := X^4 + pX - p \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que P possède exactement deux racines réelles (on pourra utiliser des techniques de l'analyse).
3. On note x_1 et x_2 les deux racines réelles de P. Déterminer les degrés $[\mathbb{Q}(x_1) : \mathbb{Q}]$ et $[\mathbb{Q}(x_2) : \mathbb{Q}]$.
4. Si l'on note $a := -(x_1 + x_2) \in \mathbb{R}$, $b := x_1 x_2 \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $a', b' \in \mathbb{R}$ tels que
$$P = (X^2 + aX + b)(X^2 + a'X + b')$$
et $a' = -a$, $b + b' = a^2$, $a(b' - b) = p$, $bb' = -p$.
5. En déduire que b et b' sont racines du polynôme $X^2 - a^2X - p \in \mathbb{R}[X]$.

6. En déduire que $b - b' = \pm\sqrt{a^4 + 4p}$.
7. En déduire que a^2 est racine du polynôme $Q := X^3 + 4pX - p^2$.
8. Déterminer $[\mathbb{Q}(a^2) : \mathbb{Q}]$ et en déduire que les points $(a^2, 0)$ et $(a, 0)$ ne sont pas constructibles à partir de $\{O, A\}$.
9. En déduire qu'au moins l'un des deux points $(x_1, 0)$ et $(x_2, 0)$ n'est pas constructible à partir de $\{O, A\}$.
10. Conclure.

Exercice 6

1. Construire à la règle et au compas un point M tel que la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$ soit $\frac{2\pi}{3}$.
2. Montrer que l'angle $\widehat{AOM}$ n'est pas trisectable à la règle et au compas.
3. Construire à la règle et au compas un point N tel que la mesure de l'angle $\widehat{AON}$ soit $\frac{\pi}{4}$.
4. Montrer que l'angle $\widehat{AON}$ est trisectable à la règle et au compas.
5. Construire à la règle et au compas un point S tel que la mesure de l'angle $\widehat{AOS}$ soit $\frac{\pi}{12}$.
6. Exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ à l'aide de nombres rationnels et de racines carrées.