Feuille de TD 1 : Extensions de corps et algébricité

Exercice 1

1. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ de $\mathbb{Q}$ ainsi qu'une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$.
2. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}\right)$ de $\mathbb{Q}$ ainsi qu'une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}\right)$.

Exercice 2

1. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$ de $\mathbb{Q}$ ainsi qu'une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$.
2. Montrer que le nombre réel $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ de $\mathbb{Q}$.
3. En déduire que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$.
4. Quel est le polynôme minimal de $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 3 On note $\alpha := 1 + \sqrt[3]{7} \in \mathbb{R}$. Montrer que α est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et déterminer le degré ainsi que le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 4 On note $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}, j\right)$ de $\mathbb{Q}$ ainsi qu'une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}, j\right)$.
2. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}, j, i\right)$ de $\mathbb{Q}$.
3. Déterminer le degré de l'extension $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}+i\right)$ de $\mathbb{Q}$.

Exercice 5 On note $P := X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P. Justifier que α est algébrique sur $\mathbb{Q}$, déterminer son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ et en déduire son degré sur $\mathbb{Q}$.
3. Exprimer $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha^2+\alpha+1}$ en fonction de 1, α et α^2.

Exercice 6 Soient K et L deux corps tels que K est un sous-corps de L. On suppose que L est une extension de degré fini de K et on note $n := [L : K]$. Soit $a \in L$. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On suppose dans cette question que l'entier n est premier. Montrer qu'il n'existe pas de sous-corps de L strictement contenu dans L et contenant strictement K.
2. On suppose dans cette question que l'entier n est impair. Soient $x \in K$, $z \in L$ tels que $x = z^2$. Montrer que $z \in K$.
3. Justifier que a est algébrique sur K et montrer que le degré du polynôme minimal de a sur K divise n.
4. On suppose dans cette question que l'élément a, algébrique sur K, est de degré impair. Après avoir justifié que a^2 est algébrique sur K, montrer que $K(a^2) = K(a)$.

Exercice 7 Soient K, L et M trois corps tels que K et L sont des sous-corps de M et $K \subset L$. On suppose que L est une extension algébrique de K (non nécessairement de degré fini sur K). Soit a un élément de M algébrique sur L. Montrer que a est algébrique sur K.

Exercice 8 Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$. On suppose que K est une extension quadratique de $\mathbb{Q}$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $a \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tel que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$.

1. Soit $\alpha \in K \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.
2. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \cap]0; +\infty[$ tels que $\alpha = \frac{x+\sqrt{y}}{2}$ ou $\alpha = \frac{x-\sqrt{y}}{2}$. En déduire que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{y})$.
3. On écrit $y = \frac{m}{n}$ avec $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{mn})$.