Feuille de TD 5 : Résolution numérique des EDO d'ordre 1

Exercice 1 On considère l'équation différentielle

$$(\text{E}) \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = t - t^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}, \ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivable.}$$

1. Justifier que (E) possède une unique solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et déterminer y.
2. Soient $T \in]0;+\infty[$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et notons $h_N := \frac{T}{N}$ et, pour $n \in \{0, \dots, N\}$, $t_{N,n} := nh_N$. On note ensuite $y_{N,1}, \dots, y_{N,N}$ les réels donnés par la méthode d'Euler associée à la subdivision régulière $(t_{N,0}, \cdots, t_{N,N})$ de $[0, T]$ pour la résolution numérique de (E).
   (a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,
   $$y_{N,n} = h_N^2 \frac{(n-1)n}{2} - h_N^4 \frac{(n-1)^2 n^2}{4}.$$
3. Si $n \in \{1, \dots, N\}$, on note ensuite $\varepsilon_{N,n} := y_{N,n} - y(t_{N,n})$ puis $\varepsilon_N := \max\limits_{1 \le n \le N} |\varepsilon_{N,n}|$. Montrer que $\varepsilon_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle

$$(\text{E}) \begin{cases} \forall t \in [0;1],\ y'(t) = t^2 + y(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}, \ y : [0;1] \to \mathbb{R} \text{ dérivable.}$$

1. Montrer que l'équation différentielle (E) vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.
2. Déterminer l'unique solution $y : [0;1] \to \mathbb{R}$ de (E).
3. On note f la fonction de deux variables
   $$\begin{array}{ccc} [0;1] \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, \gamma) & \mapsto & t^2 + \gamma \end{array}$$
   Montrer que, pour tout $(t, \gamma) \in [0;1] \times \mathbb{R}$, $f^{[1]}(t, \gamma) = 2t + t^2 + \gamma$ et, si $l \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, $f^{[l]}(t, \gamma) = 2 + 2t + t^2 + \gamma$.
4. Montrer que la méthode de Taylor d'ordre 3 associée à une subdivision régulière de $[0;1]$ pour la résolution numérique de (E) est stable. En déduire que la méthode est convergente.

Exercice 3 Soit $\alpha \in]0;1]$. On considère la méthode de Runge-Kutta associée au tableau de Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \alpha & \alpha & \\ \hline & 1-\frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array}$$

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit (E) l'équation différentielle

$$\begin{cases} \forall t \in [a,b],\ y'(t) = f\big(t, y(t)\big) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad , \ y : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ dérivable}$$

dont on suppose qu'elle possède une unique solution $y : [a,b] \to \mathbb{R}$. Soit enfin $(t_0, \ldots, t_N)$ une subdivision de $[a,b]$. Donner la relation de récurrence définissant les réels $y_1, \ldots, y_N$ donnés par la méthode de Runge-Kutta ci-dessus.

2. Montrer que la méthode de Runge-Kutta considérée est d'ordre de consistance au moins 2.

3. Montrer que la méthode de Runge-Kutta considérée est stable pour la résolution numérique de l'équation différentielle de l'exercice 2.

Exercice 4 Dans cet exercice, on considère la méthode de Runge-Kutta associée au tableau de Butcher

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Reprendre la question 1 de l'exercice 3 avec cette méthode de Runge-Kutta.

Exercice 5 On considère l'équation différentielle

$$(\text{E}) \ \begin{cases} \forall t \in [0;1],\ y'(t) = 1 + (y(t))^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad , \ y : [0;1] \to \mathbb{R} \text{ dérivable.}$$

1. Montrer que la fonction $g : [0;1] \to \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto \tan(t)$ est l'unique solution de (E).

2. Montrer que la fonction $f : [0;1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ (t, \gamma) \mapsto 1 + \gamma^2$ ne vérifie pas l'hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz.