Feuille de TD 5 : Résolution numérique des EDO d'ordre 1

Exercice 1 On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = t - t^3 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad ,\ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivable.}$$

1. Justifier que (E) possède une unique solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et déterminer y.
2. Soient $T \in]0; +\infty[$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et notons $h_N := \frac{T}{N}$ et, pour $n \in \{0, \dots, N\}$, $t_{N,n} := nh_N$. On note ensuite $y_{N,1}, \dots, y_{N,N}$ les réels donnés par la méthode d'Euler associée à la subdivision régulière $(t_{N,0}, \cdots, t_{N,N})$ de $[0, T]$ pour la résolution numérique de (E).
   (a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,
   $$y_{N,n} = h_N^2 \frac{(n-1)n}{2} - h_N^4 \frac{(n-1)^2 n^2}{4}.$$
3. Si $n \in \{1, \dots, N\}$, on note ensuite $\varepsilon_{N,n} := y_{N,n} - y(t_{N,n})$ puis $\varepsilon_N := \max\limits_{1 \le n \le N} |\varepsilon_{N,n}|$. Montrer que $\varepsilon_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

Exercice 2 Définir une fonction sous Scilab qui à tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, tout réel y_0, toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que l'équation différentielle

$$\text{(E)} \begin{cases} \forall t \in [a, b],\ y'(t) = f\big(t, y(t)\big) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad ,\ y : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ dérivable}$$

possède une unique solution y et tout entier $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ associe les réels $y_1, \dots, y_N$ donnés par la méthode d'Euler associée à la subdivision régulière $(t_0, \dots, t_N)$ de $[a, b]$ pour la résolution numérique de (E).

Tester cette fonction sur l'exemple de l'exercice précédent.

Exercice 3 On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \begin{cases} \forall t \in [0; 1],\ y'(t) = t^2 + y(t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad ,\ y : [0; 1] \to \mathbb{R} \text{ dérivable.}$$

1. Montrer que l'équation différentielle (E) vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.
2. Déterminer l'unique solution $y : [0; 1] \to \mathbb{R}$ de (E).
3. A l'aide de la fonction Scilab définie dans l'exercice précédent, approcher $y(1)$ à l'aide des méthodes d'Euler associées aux subdivisions régulières de $[0; 1]$ de pas respectifs $0,1$ et 10^{-3}. Comparer.