Feuille de TD 4 : Intégration numérique

Dans toute cette feuille, a et b désignent des nombres réels tels que $a < b$, n est un entier naturel, $(x_0, \ldots, x_n)$ est une subdivision du segment $[a, b]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 1

1. On suppose dans cette question que f est strictement croissante. Montrer que
$$R_g(f) < \int_a^b f(t)\mathrm{d}t < R_d(f)$$
où R_g et R_d désignent les méthodes des rectangles respectivement à gauche et à droite associées à la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$.

2. Montrer que la méthode R_m des points milieux associée à la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ est d'ordre au moins 1.

3. Supposons que la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ soit régulière et que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. Soit $\epsilon \in]0, +\infty[$. À partir de quelle valeur N de n sera-t-on certain que $\left|R_g(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \epsilon$? que $\left|R_d(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \epsilon$? que $\left|R_m(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \epsilon$? On pensera à utiliser les majorations du cours.

4. Pour chacune des trois méthodes R_g, R_d et R_m, déterminer un tel N si $\epsilon = 10^{-8}$, $a = 1$, $b = 3$ et f est la fonction $[a, b] \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto e^x$.

5. Même question si f est cette fois-ci la fonction $[a, b] \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \sqrt{x}$.

6. Définir des fonctions sous Scilab qui à tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, tout entier $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable sur $[a, b]$ associent les approximations de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ données par les méthodes des rectangles, à gauche et à droite, et la méthode des points milieux associées à la subdivision régulière $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$.

7. Appliquer ces fonctions Scilab aux exemples des questions 4 et 5.

8. Comparer l'intégrale $\int_0^2 \cos(t)\mathrm{d}t$ et les approximations obtenues à l'aide des différentes méthodes de quadrature ci-dessus pour $n = 20$.

9. A l'aide de la méthode des points milieux, déterminer une approximation de l'intégrale $\int_0^1 e^{\sin(x)}\mathrm{d}t$ à 10^{-8} près.

On suppose dans les exercices suivants que la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ est régulière.

Exercice 2 On considère les méthodes des trapèzes et de Simpson, respectivement notées J_1 et J_2, associées à la subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$.

1. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a, b]$ et soit $\epsilon \in]0, +\infty[$. À partir de quelle valeur N de n sera-t-on certain que $\left| J_1(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \epsilon$? que $\left| J_2(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \epsilon$? On pensera à utiliser les majorations du cours.
2. Pour la méthode de Simpson J_2, déterminer un tel N pour les exemples des questions 4 et 5 de l'exercice 1.
3. Définir des fonctions sous Scilab qui à tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, tout entier $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable sur $[a, b]$ associent les approximations de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ données par la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson associées à la subdivision régulière $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$.
4. Reprendre la question 7 de l'exercice 1 avec la formule de quadrature J_1 et la question 8 de l'exercice 1 avec les formules de quadrature J_1 et J_2.

Exercice 3 Dans cet exercice, on considère la méthode de Newton-Cotes J_4 d'ordre 4 associée à la subdivision régulière $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$, appelée méthode de Boole-Villarceau.

1. Déterminer les poids $\omega_0, \dots, \omega_4$ de la méthode J_4.
2. En déduire le majorant de l'erreur $\left| J_4(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right|$ donné par le noyau de Peano.
3. À partir de quelle valeur N de n sera-t-on certain que $\left| J_4(\exp) - \int_1^3 e^t \,\mathrm{d}t \right| \leq 10^{-8}$ (où exp désigne la fonction exponentielle restreinte au segment $[1, 3]$) ?

Exercice 4 Déterminer le noyau de Peano d'ordre 0 de la méthode R_g des rectangles à gauche associée à la subdivision régulière $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ et, dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, en déduire une majoration de l'erreur $\left| R_g(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right|$.

Exercice 5

1. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de signe constant sur $[a, b]$ et supposons que f est continue sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(\xi) \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$
2. En déduire que, si f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a, b]$, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que
$$J_2(f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\xi).$$