Feuille de TD 2 : Interpolation polynomiale

Exercice 1 Programmer sous Scilab la méthode “basique” d’évaluation d’un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en un nombre réel, puis la méthode de Horner. Tester les deux méthodes sur différents exemples (on pourra penser à utiliser la commande rand pour générer des exemples aléatoires).

Exercice 2

1. Déterminer la base de Lagrange associée aux centres -1, 0, 1 et 2.
2. Définir une fonction sous Scilab qui à tout ensemble $\{c_0, \dots, c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, de nombres réels deux à deux distincts renvoie la base de Lagrange associée aux centres $c_0, \dots, c_n$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 0$. Déterminer le polynôme d’interpolation de f aux centres -1, 0, 1 et 2 à l’aide de la méthode d’interpolation de Lagrange.
4. Définir une fonction sous Scilab qui à tout ensemble de centres $\{c_0, \dots, c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ et à tout n-uplet d’ordonnées $\{y_0, \dots, y_n\}$ associe, en utilisant la base de Lagrange associée aux centres $c_0, \dots, c_n$, le polynôme d’interpolation de toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $c_i \in I$ et $f(c_i) = y_i$.

Exercice 3

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 0$. Déterminer la différence divisée de f en les centres -1, 0, 1 et 2.
2. Définir une fonction sous Scilab qui à tout ensemble de centres $\{c_0, \dots, c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, et toute fonction f (définie sur un intervalle contenant $c_0, \dots, c_n$) de valeurs respectives $y_0, \dots, y_n$ en les centres $c_0, \dots, c_n$ associe la différence divisée $f[c_0, \dots, c_n]$.
3. On reprend la fonction f de la question 1. Déterminer la décomposition dans la base de Newton associée aux centres -1, 0, 1 et 2 du polynôme d’interpolation de f.
4. Définir une fonction sous Scilab qui à tout ensemble de centres $\{c_0, \dots, c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, et toute fonction f de valeurs respectives $y_0, \dots, y_n$ en les centres $c_0, \dots, c_n$ associe les coordonnées du polynôme d’interpolation $P_{f,c_0,\dots,c_n}$ dans la base de Newton associée aux centres $c_0, \dots, c_n$.
5. Définir une fonction sous Scilab qui à tout ensemble de centres $\{c_0, \dots, c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, et toute fonction f de valeurs respectives $y_0, \dots, y_n$ en les centres $c_0, \dots, c_n$ associe, en utilisant ses coordonnées dans la base de Newton associée aux centres $c_0, \dots, c_n$, le polynôme d’interpolation $P_{f,c_0,\dots,c_n}$.

Exercice 4 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et soient $c_0, \ldots, c_n$ des nombres réels deux à deux distincts du segment $[a, b]$. On dit que les centres $c_0, \ldots, c_n$ sont équirépartis sur $[a, b]$ si $c_0 = a$, $c_n = b$ et, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $c_{i+1} = c_i + \frac{b-a}{n}$. Montrer que les centres $c_0, \ldots, c_n$ sont équirépartis sur $[a, b]$ ssi, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $c_k = a + k\frac{b-a}{n}$ (en particulier, les $n+1$ centres équirépartis sur $[a, b]$ sont uniques).

2. Définir une fonction sous Scilab qui à tout segment $[a, b]$ et tout entier naturel $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ associe les $n+1$ centres équirépartis sur $[a, b]$.

3. On considère la fonction $g : \begin{array}{ccc} [-5; 5] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$ et, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $P_{g,n}$ le polynôme d'interpolation de g aux $n+1$ centres équirépartis sur $[-5, 5]$. À l'aide de Scilab, représenter graphiquement la fonction g et les fonctions polynomiales $P_{g,n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Que constate-t-on ?

4. Définir une fonction sous Scilab qui à tout segment $[a, b]$ et tout entier naturel $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ associe les centres de Tchebychev d'ordre n du segment $[a, b]$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P^T_{g,n}$ le polynôme d'interpolation de g aux centres de Tchebychev d'ordre n du segment $[-5; 5]$. À l'aide de Scilab, représenter graphiquement la fonction g et les fonctions polynomiales $P^T_{g,n}$, $n \in \mathbb{N}$. Que constate-t-on ?

Exercice 5 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et soient $c_0, \ldots, c_n$ les $n+1$ centres équirépartis sur $[a, b]$. Soit également $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$.

1. Soit $i \in \{0, \ldots, n+1\}$. Montrer que $\max\limits_{x \in [c_i, c_{i+1}]} |(x - c_i)(x - c_{i+1})| = \dfrac{h^2}{4}$, où $h := \frac{b-a}{n}$.

2. En déduire que

$$\max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - c_i) \right| \leq \frac{n!\, h^{n+1}}{4}.$$

3. Montrer que

$$\|f - P_{f,c_0,\ldots,c_n}\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty,[a,b]} h^{n+1}}{4(n+1)}.$$

Exercice 6 1. Déterminer les polynômes de Tchebychev T_2, T_3, T_4 et T_5.

2. En utilisant la formule de Moivre, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \binom{n}{2k} X^{n-2k} \left(X^2 - 1\right)^k .$$

3. Considérons le produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)\, Q(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x \end{array}$$

sur $\mathbb{R}[X]$. Montrer que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$, $\langle T_n, T_m \rangle = 0$.