Feuille de TD 1 : Equations non linéaires

Exercice 1 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sur fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Soit $\epsilon \in]0, +\infty[$. On souhaite déterminer une approximation d'un zéro de f à ϵ près à l'aide de la méthode de dichotomie. Montrer que $E\left(\frac{\ln(b-a)-\ln(\epsilon)}{\ln(2)}\right) + 1$ itérations de l'algorithme suffiront.

Exercice 2 On souhaite déterminer une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près à l'aide de la méthode de dichotomie.

1. Déterminer une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, à laquelle appliquer la méthode de dichotomie pour obtenir une telle approximation.
2. Combien d'itérations suffiront pour obtenir cette approximation ?
3. Déterminer cette approximation à l'aide de Scilab.

Exercice 3 On souhaite déterminer une approximation du nombre $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ à l'aide de la méthode du point fixe.

1. Justifier que α annule la fonction $f : [1; 2] \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^2 - x - 1$.
2. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. On considère la fonction $g : [1; 2] \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{x+1}$. Montrer que, pour tout $x \in [1; 2]$, $f(x) = 0$ ssi $g(x) = x$.
4. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et montrer que $g([1; 2]) \subset [1; 2]$.
5. Montrer que $\max\limits_{x \in [1;2]} |g'(x)| < 1$.
6. En déduire que la méthode du point fixe converge vers α.
7. Déterminer une approximation de α à 10^{-8} près à l'aide de Scilab.
8. Comparer les nombres d'itérations nécessaires à la méthode du point fixe et à la méthode de dichotomie pour obtenir une approximation de α à 10^{-8} près.

Exercice 4 On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^2 + x - 2$.

1. Déterminer les points fixes de g.
2. Calculer les premiers itérés de x_0 par g, où $x_0 = -2$, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ ou 2. Que constate-t-on ?

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $h([a, b]) \subset [a, b]$. On suppose de plus que h possède un point fixe $\alpha \in [a, b]$ tel que $|h'(\alpha)| < 1$. Montrer qu'il existe $\eta \in]0, +\infty[$ tel que si $x_0 \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, la suite des itérés de x_0 par h converge vers α (on dit que α est un point fixe <u>attractif</u> de h).

4. Supposons maintenant que h possède un point fixe $\beta \in [a, b]$ tel que $|h'(\beta)| > 1$. Montrer que si $x_0 \in [a, b]$, la suite des itérés de x_0 par h soit est stationnaire égale à β à partir d'un certain rang, soit ne converge pas vers β (on dit que β est un point fixe <u>répulsif</u> de h).

5. Expliquer les constatations de la question 2.

Exercice 5

1. Programmer la méthode de Newton sous Scilab et l'appliquer aux fonctions des exercices 2 et 3. Comparer les vitesses de convergence.

2. Programmer la méthode de la sécante sous Scilab et l'appliquer aux fonctions des exercices 2 et 3. Comparer les vitesses de convergence.