Feuille de TD 4 : Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Exercice 1 On considère les formes quadratiques q_1, q_2 et q_3 sur $\mathbb{R}^3$ données par, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$q_1(x, y, z) = x^2 - 4xy + 3y^2 + 6yz - 8z^2,$$
$$q_2(x, y, z) = 4x^2 - 4xy + 4y^2 - 6yz + 3z^2,$$
$$q_3(x, y, z) = xy + 3xz + yz.$$

Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

1. déterminer la forme polaire φ_i de q_i,
2. donner la matrice représentative de φ_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$,
3. déterminer le rang et le noyau de φ_i,
4. réduire q_i en "somme de carrés" de formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$,
5. déterminer la signature de φ_i,
6. déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale relativement à φ_i.

Exercice 2 Mêmes questions pour les formes quadratiques q_1, q_2 et q_3 sur $\mathbb{R}^3$ données par, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$q_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 5z^2 + 2yz - 2xz - 6xy,$$
$$q_2(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xz,$$
$$q_3(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2xy,$$

ainsi que pour la forme quadratique q_4 sur $\mathbb{R}^4$ donnée par, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$q_4(x, y, z, t) = 2xz - 6xy - 6yt + 2zt.$$

Exercice 3 On considère la forme quadratique

$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^2 + y^2 - z^2 \end{array}$$

sur $\mathbb{R}^3$. On note φ sa forme polaire. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et notons F le sous-espace vectoriel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax + yb\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'orthogonal de F relativement à φ.
2. Déterminer la signature de la restriction de φ à F en fonction de a et b.