Feuille de TD 4 : Espaces préhilbertiens

Exercice 1 1. Montrer que le couple $\big(\mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R}),\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$, où, pour tous $f,g\in\mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$,

$$\langle f,g\rangle := f(0)g(0)+\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t,$$

est un espace préhilbertien réel.

2. Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $w\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une fonction strictement positive sur $]a,b[$. Montrer que le couple $\big(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$, où, pour tous $f,g\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$,

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(t)g(t)w(t)\mathrm{d}t,$$

est un espace préhilbertien réel.

Exercice 2 On considère l'espace préhilbertien réel $\big(\mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R}),\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ où, pour tous $f,g\in\mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$,

$$\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

On note $E:=\mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$, $F:=\{f\in E\mid f(0)=0\}$.

1. Soit $g\in F^\perp$. Montrer que la fonction $h: x\in[0;1]\mapsto xg(x)\in\mathbb{R}$ appartient à F, et en déduire que g est la fonction identiquement nul sur $[0;1]$.
2. En déduire que $F^\perp=\{0\}$ puis que $F\oplus F^\perp\neq E$.
3. On note maintenant $G:=\mathrm{Vect}\left\{1;\mathrm{id}_{[0;1]}\right\}$ (où "1" désigne la fonction constante égale à 1 de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$). Déterminer une base orthonormale de G et en déduire la quantité

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1\left(t^2-at-b\right)^2\mathrm{d}t.$$

Exercice 3 On note H l'ensemble des suites à termes complexes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_n \|x_{n+1}-x_n\|^2$ converge.

1. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in H$. Montrer que la suite $\left(x_0\,\overline{y_0}+\sum_{n=0}^{k}(x_{n+1}-x_n)\,\overline{(y_{n+1}-y_n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H, on pose

$$\left\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\rangle = x_0\,\overline{y_0}+\sum_{n=0}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)\,\overline{(y_{n+1}-y_n)}.$$

Montrer que le couple $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ forme un espace préhilbertien complexe.