Feuille de TD 3 : Espaces hermitiens

Exercice 1 On considère l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C} \\ \big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) & \mapsto & \overline{x_1}x_2 + 3\overline{y_1}y_2 + 6\overline{z_1}z_2 + i\overline{x_1}y_2 - i\overline{y_1}x_2 + 2i\overline{y_1}z_2 - 2i\overline{z_1}y_2 \end{array}$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^3$.
2. Exprimer la matrice du produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$.
3. Déterminer une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 2 On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ muni du produit scalaire hermitien canonique, puis le sous-espace vectoriel

$$F := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x - y + iz = 0\big\}$$

de $\mathbb{C}^3$.

1. Déterminer une famille génératrice de l'orthogonal $F^\perp$ de F.
2. Déterminer une base orthonormale de F.
3. Déterminer la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ de la projection orthogonale sur F.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n ainsi que l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_n[X] & \to & \mathbb{C} \\ (P, Q) & \mapsto & \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{P\left(e^{it}\right)} Q\left(e^{it}\right) \, \mathrm{d}t \end{array}$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Montrer que la base $\{1, X, \ldots, X^n\}$ de $\mathbb{C}_n[X]$ est une base orthonormale par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
3. En déduire, pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, l'expression de la quantité $\|P\|$ en fonction des coefficients du polynôme P (où $\| \cdot \|$ désigne la norme hermitienne associée au produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

Exercice 4 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On suppose que, pour tout $v \in E$, $\langle f(v), v \rangle = 0$.

1. Montrer que pour tous $v, w \in E$, $\langle f(v), w \rangle = 0$.

2. En déduire que f est nécessairement l'endomorphisme nul de E.

3. L'assertion correspondante dans le cadre euclidien est-elle vraie ?

Exercice 5 Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $M \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ et

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace hermitien et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Montrer que f est hermitien si et seulement si pour tout $v \in E$, $\langle f(v), v\rangle \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $v \in E$, $\langle f(v), v\rangle = \langle v, f(v)\rangle$.

Exercice 7 Diagonaliser "dans une base orthonormale" les matrices hermitiennes

$$A := \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & -1 \\ i & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.

Exercice 8 On note $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et

$$A := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que A est une matrice unitaire.

2. Montrer que le vecteur colonne $V := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre i.

3. Déterminer une base de $V^\perp$.

4. En exprimant la matrice représentative de la "restriction de A à $V^\perp$" dans cette base, déterminer le spectre de A.

5. Diagonaliser A "dans une base orthonormale".