Feuille de TD 2 : Espaces euclidiens

Exercice 1 On considère l'application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) & \mapsto & x_1x_2 + 2y_1y_2 + 3z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2 \end{array}$$

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne induite par $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Les deux questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Montrer que, pour tous $v, w \in E$, $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$ (identité du parallélogramme).
2. Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille orthogonale de E. Montrer que $\left\|\sum_{i=1}^{p} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$.

Exercice 3 Déterminer une famille génératrice de l'orthogonal

1. du vecteur $(1, 1, 1)$ dans l'espace euclidien $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$,
2. de l'hyperplan d'équation $x + 2y - z + t = 0$ dans $\left(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$,
3. du sous-espace vectoriel engendré par $(1, 1, 0)$ et $(-1, 2, 1)$ dans $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$.

Exercice 4 Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et soient A et B deux sous-ensembles de E.

1. Montrer que $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.
2. Montrer que $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

Exercice 5 Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux familles libres

1. $\{(1, 1), (2, 3)\}$ de $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$,
2. $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ de $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$,
3. $\{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 2, 0), (-1, 2, -1, 1), (-1, -1, 1, 15)\}$ de $\left(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$
4. $\{(1, 2, 1), (-1, 0, -1)\}$ de $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$, puis, pour ce cas, compléter la famille orthonormale obtenue en une base orthonormale de $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$,
5. $\{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$ de $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$, puis, pour ce cas, donner la décomposition QR de la matrice A de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont formées, dans l'ordre, par les vecteurs $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ et $(-1, 1, 0)$.

Exercice 6 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 muni du produit scalaire

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \langle P,Q \rangle := \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Déterminer une base orthonormale de l'espace euclidien $(\mathbb{R}_2[X], \langle \cdot,\cdot \rangle)$.

Exercice 7 Déterminer si les matrices suivantes de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sont orthogonales :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 Déterminer la décomposition QR des matrices inversibles suivantes :

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 Diagonaliser “dans une base orthonormale” les matrices symétriques

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 10 Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit f un endomorphisme symétrique de E.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Montrer que $F^\perp$ est également stable par f.
2. En déduire que, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f, $(E_\lambda)^\perp$ est stable par f.

Exercice 11 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice

$$A := \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier sans calcul que f est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que l'endomorphisme f est orthogonal. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.

3. Déterminer à partir de la trace de f les multiplicités des valeurs propres de f dans le polynôme caractéristique de f sans calculer celui-ci. En déduire le polynôme caractéristique de f.

4. Déterminer une base orthonormale de l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 de f.

5. Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 de f vérifie $E_{-1} = (E_1)^\perp$. En utilisant l'équation linéaire caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.

6. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.

Exercice 12 On considère la matrice

$$A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que la matrice A est orthogonale.

2. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

3. Déterminer une matrice orthogonale $O \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ et des angles $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ telles que
$$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & 0 \\ 0 & R(\theta_2) \end{pmatrix}.$$