Feuille de TD 2 : Espaces euclidiens

Exercice 1 On considère l'application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) & \mapsto & x_1x_2+2y_1y_2+3z_1z_2+x_1y_2+y_1x_2 \end{array}$$

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne induite par $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Les deux questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Montrer que, pour tous $v,w\in E$, $\|v+w\|^2+\|v-w\|^2=2\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)$ (identité du parallélogramme).
2. Soit $\{v_1,\dots,v_p\}$ une famille orthogonale de E. Montrer que $\left\|\sum_{i=1}^{p} v_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{p}\|v_i\|^2$.

Exercice 3 Déterminer une famille génératrice de l'orthogonal

1. du vecteur $(1,1,1)$ dans l'espace euclidien $\left(\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$,
2. de l'hyperplan d'équation $x+2y-z+t=0$ dans $\left(\mathbb{R}^4,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$,
3. du sous-espace vectoriel engendré par $(1,1,0)$ et $(-1,2,1)$ dans $\left(\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{can}}\right)$.

Exercice 4 Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et soient A et B deux sous-ensembles de E.

1. Montrer que $A^\perp=(\mathrm{Vect}(A))^\perp$.
2. Montrer que $(A\cup B)^\perp=A^\perp\cap B^\perp$.

Exercice 5 Soient $m,n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $A\in\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B\in\mathrm{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. On dit qu'un vecteur $X_0\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est <u>solution au sens des moindres carrés</u> de l'équation

$$\text{(E)}\quad AX=B,\ X\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

si

$$\text{pour tout } X\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AX-B\|\geq\|AX_0-B\|$$

(où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire associé à la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Nous allons montrer que l'équation (E) admet toujours des solutions au sens des moindres carrés.

1. Justifier que $\inf\limits_{X\in\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\|AX-B\|=d\left(B,\mathrm{Im}(A)\right)$.

2. En déduire que $\inf_{X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\| = \left\|p_{\mathrm{Im}(A)}(B) - B\right\|$ (où $p_{\mathrm{Im}(A)}$ désigne la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$).

3. En déduire que l'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de l'équation (E) est l'ensemble des antécédents de $p_{\mathrm{Im}(A)}(B)$ par A (en particulier, si A est injective alors il y a une unique solution au sens des moindres carrés).

4. Justifier que, si $Y_0 \in \mathrm{Im}(A)$, $Y_0 = p_{\mathrm{Im}(A)}(B)$ si et seulement si $Y_0 - B \in (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$.

5. En déduire que, si $X_0 \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, X_0 est une solution au sens des moindres carrés de (E) si et seulement si ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.

Exercice 6 Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux familles libres

1. $\{(1,1),(2,3)\}$ de $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{can}}\right)$,
2. $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ de $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{can}}\right)$,
3. $\{(1,0,1,0),(1,1,2,0),(-1,2,-1,1),(-1,-1,1,15)\}$ de $\left(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{can}}\right)$
4. $\{(1,2,1),(-1,0,-1)\}$ de $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{can}}\right)$, puis, pour ce cas, compléter la famille orthonormale obtenue en une base orthonormale de $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{can}}\right)$,
5. $\{(1,0,1),(1,1,1),(-1,1,0)\}$ de $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{can}}\right)$, puis, pour ce cas, donner la décomposition QR de la matrice A de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont formées, dans l'ordre, par les vecteurs $(1,0,1)$, $(1,1,1)$ et $(-1,1,0)$.

Exercice 7 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 muni du produit scalaire

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \langle P,Q\rangle := \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Déterminer une base orthonormale de l'espace euclidien $(\mathbb{R}_2[X], \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Exercice 8 Déterminer si les matrices suivantes de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sont orthogonales :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 Déterminer la décomposition QR des matrices inversibles suivantes :

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 Diagonaliser "dans une base orthonormale" les matrices symétriques

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 11 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit f un endomorphisme symétrique de E.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Montrer que $F^\perp$ est également stable par F.
2. En déduire que, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f, $(E_\lambda)^\perp$ est stable par f.

Exercice 12 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice

$$A := \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier sans calcul que f est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que l'endomorphisme f est orthogonal. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.
3. Déterminer à partir de la trace de f les multiplicités des valeurs propres de f dans le polynôme caractéristique de f sans calculer celui-ci. En déduire le polynôme caractéristique de f.
4. Déterminer une base orthonormale de l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 de f.
5. Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 de f vérifie $E_{-1} = (E_1)^\perp$. En utilisant l'équation linéaire caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.
6. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.

Exercice 13 On considère la matrice

$$A := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que la matrice A est orthogonale.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
3. Déterminer une matrice orthogonale $O \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ et des angles $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ telles que
$$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & 0 \\ 0 & R(\theta_2) \end{pmatrix}.$$