Feuille de TD 1 : Réduction des endomorphismes

Exercice 1 1. Déterminer si chacune des matrices suivantes de $M_2(\mathbb{R})$ ou $M_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable et, si oui, la diagonaliser :

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. Déterminer si chacune des matrices suivantes de $M_3(\mathbb{R})$ et $M_4(\mathbb{R})$ respectivement est diagonalisable et, si oui, la diagonaliser :

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $M_4(\mathbb{C})$. Expliquer sans calcul pourquoi A n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 On considère les matrices $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ et $P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$.

1. Justifier, sans calculer l'inverse de la matrice inversible P, que $P^{-1}AP = D$.
2. Déterminer une matrice $C \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $C^3 = D$.
3. En déduire une matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$ (on précise que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$).

Exercice 5 On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

1. Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de la A.

2. En déduire sans calcul le polynôme minimal de A.

3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6 On considère les matrices $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
On a $\chi_A = -(X+1)(X+2)(X-3)$, $\chi_B = (X-1)(X+2)^2$ et $\chi_C = -(X-1)^3$.

1. Déterminer les polynômes minimaux de A, B et C.

2. Pour chacune des matrices A, B et C, déterminer si elle est diagonalisable ou non.

Exercice 7 Déterminer le polynôme minimal des matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 8 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de chacune des matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 On considère les matrices $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer, sans calculer ses espaces propres, que la matrice D est diagonalisable.

2. Déterminer les polynômes caractéristiques et les polynômes minimaux de A, B et C.

3. Parmi les matrices A, B et C, lesquelles sont diagonalisables et laquelle est semblable à D ?

Exercice 10 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

2. Montrer que la matrice $A - 2I_4$ est nilpotente d'indice de nilpotence 4 et déterminer le noyau de la matrice $(A_2 - I_4)^3$.

3. En déduire une réduction de Jordan de $A - 2I_4$, puis une réduction de Jordan de A.

4. Si f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est A, donner une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice représentative de f est sous forme de Jordan.

Exercice 11 Réduire sous forme de Jordan les matrices réelles suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix},\ C := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix},\ D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ E := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

2. Calculer $(A - 2I_3)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3. Donner la décomposition de Dunford de A et déterminer l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 On considère les trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs valeurs initiales $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ et les relations de récurrence :

$$\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & -6x_n - 5y_n - 5z_n \\ y_{n+1} & = & 2x_n \qquad\quad + 6z_n \\ z_{n+1} & = & -2x_n + 4y_n - 2z_n \end{array}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $V_n = \left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \right\} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$.
2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A et la décomposition de Dunford de A.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n, puis l'expression de x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et de n.

Exercice 14 En utilisant les matrices, déterminer le terme général de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, définies par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$,
2. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$,
3. $u_{n+2} = -u_n$.