Exercices maison 3

Exercice 1 On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$. Justifier que A est inversible et déterminer la décomposition QR de A.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On note $P := \big(\mathrm{Re}(m_{i,j})\big)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $Q := \big(\mathrm{Im}(m_{i,j})\big)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, puis on note N la matrice $\begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix}$ (écrite par blocs) de $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne si et seulement si la matrice N de $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est symétrique.
2. Montrer que la matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est unitaire si et seulement si la matrice N de $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est orthogonale.