Éléments de correction des exercices maison n°2

Exercice 1 1) On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a $\chi_A = (-X)^3$ et, par le théorème de Cayley-Hamilton, A est donc nilpotente, d'indice de nilpotence au plus égal à 3.

On a $A \neq 0_3$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq 0_3$ donc l'indice de nilpotence de la matrice nilpotente A est 3.

Si l'on note alors $Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y \notin \operatorname{Ker} A^2$ et la famille $\{A^2Y, AY, Y\}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a $AY = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A^2Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, et si l'on pose

$$P := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$$

$P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une réduction sous forme de Jordan de A.

2. On considère la matrice

$$B := \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

de $M_4(\mathbb{K})$.

On a $\chi_B = (-X)(-4-X)^3$. On a ensuite

$$N_0 = E_0 = \operatorname{Ker} B = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

et, comme $(B+4I_4)^3 = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$,

$$N_{-4} = \operatorname{Ker}(B+4I_4)^3 = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

On note alors $P_0 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{K})$ et on a

$$P_0^{-1} B P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On considère à présent la matrice $B_{-4} := \begin{pmatrix} -4 & 4 & -8 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{K})$ ainsi que la matrice nilpotente

$$U := B_{-4} + 4I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K}).$$

On a $U \neq 0_3$ et $U^2 = 0_3$ donc l'indice de nilpotence de la matrice nilpotente U est 2.

On a ensuite $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

On choisit alors le vecteur $Y := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ pour compléter la famille libre $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ en une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Ensuite, $UY = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ et on choisit le vecteur $Z := \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ pour compléter la famille $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ en une base de $\operatorname{Ker} U$.

La famille $\{Z, UY, Y\}$ est alors une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ et si l'on pose $Q := \begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, on a $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ et on a $Q^{-1} U Q = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $Q^{-1} B_{-4} Q = \begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&1\\0&0&-4\end{pmatrix}$.

Enfin, si l'on pose $\tilde{P} := \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&4&0\\0&2&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$, on a $\tilde{P} \in GL_4(\mathbb{R})$ et

$$(P_0 \tilde{P})^{-1} B (P_0 \tilde{P}) = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-4&0&0\\0&0&-4&1\\0&0&0&-4\end{pmatrix},$$

qui est une réduction sous forme de Jordan de B.

Exercice 2

1) On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

de $M_3(\mathbb{R})$. On a

- $\chi_A = (1-X)(2-X)^2$
- $N_1 = E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

et

- $N_2 = \mathrm{Ker}(A-2I_3)^2 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Si l'on pose ~~alors~~ $P := \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, on a $P \in GL_3(\mathbb{R})$,

$P^{-1} = \begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et,

si l'on note

$$D := P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

et $U := A - D = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

D est diagonalisable, U est nilpotente, $DU = UD$ et $A = D + U$ est la décomposition de Dunford de A.

2) On a $A^0 = I_3$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, comme $DU = UD$, on a

$$A^n = (D+U)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} U^k$$

Or $U^2 = O_3$ donc

$$A^n = D^n + n D^{n-1} U.$$

On a $D^n = \left(P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}\right)^n$

$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & 2^n-1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & 2^n-1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 2^{n-1}-1 & 2^{n-1}-1 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & 2^n-1+n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$