Algèbre bilinéaire, espaces euclidiens : Devoir surveillé n° 1 (23 novembre 2021)

Durée : 1h15. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 On considère les matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A et le polynôme minimal μ_A de A. En déduire que A est une matrice trigonalisable non diagonalisable.

   Solution : On a

$$\begin{aligned}
\chi_A = \det(A - XI_3) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 1-X & 2-X & 1 \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X) \begin{vmatrix} 2-X & 0 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (2-X)(1-X)^2 \\
&= -(X-2)(X-1)^2.
\end{aligned}$$

   Ainsi, $\mu_A = (X-2)(X-1)$ ou $\mu_A = (X-2)(X-1)^2$. Or

$$\big((X-2)(X-1)\big)(A) = (A - 2I_3)(A - I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_3$$

   donc, nécessairement, $\mu_A = (X-2)(X-1)^2$.

   En particulier, μ_A n'étant pas scindé à racines simples, la matrice A n'est pas diagonalisable. Comme χ_A est scindé, A est cependant trigonalisable.

2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A (pour chaque sous-espace caractéristique, en donner une base).

Solution : Comme 2 est une valeur propre de multiplicité 1 de A, le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 2 de A est

$$N_2 = E_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 1 de A est quant à lui

$$N_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3)^2 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

3. On note $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Sans calculer l'inverse de P, montrer que $P^{-1}AP = B$.

Solution : On a $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

4. Sachant que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer la décomposition de Dunford de A.

Solution : On note $D := P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$U := A - D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors D est diagonalisable, U est nilpotente, $DU = UD$ et

$$A = D + U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la décomposition de Dunford de A.

Exercice 2 On considère la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que U est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.

   Solution : On a $U^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^2 = 0_3$ donc la matrice U est nilpotente, d'indice de nilpotence 2 ($U \neq 0_3$).

2. Déterminer une réduction de Jordan de U.

   Solution : On a

$$M_2 := \mathrm{Ker}\ U^2 = \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   et

$$M_1 := \mathrm{Ker}\ U = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est alors une base de M_2 et on note $\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

   On a ensuite $U(\mathcal{B}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ et on complète cette famille en la base $\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ de M_1.

   On note alors $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, qui est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et si on pose $P := \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$P^{-1}UP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$.

   Solution : On a $F_1 \subset F_1 + F_2$ donc $(F_1 + F_2)^\perp \subset F_1^\perp$. De même, $(F_1 + F_2)^\perp \subset F_2^\perp$, et donc $(F_1 + F_2)^\perp \subset F_1^\perp \cap F_2^\perp$.

Réciproquement, soit $v \in F_1^\perp \cap F_2^\perp$, et soit $w \in F_1 + F_2$: il existe $w_1 \in F_1$ et $w_2 \in F_2$ tels que $w = w_1 + w_2$ et donc

$$\begin{aligned}
\langle v, w\rangle &= \langle v, w_1 + w_2\rangle \\
&= \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle \text{ (le produit scalaire } \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est linéaire à droite)} \\
&= 0 + 0 \text{ (car } w_1 \in F_1 \text{ et } v \in F_1^\perp\text{, et } w_2 \in F_2 \text{ et } v \in F_2^\perp\text{)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi $v \in (F_1 + F_2)^\perp$ et on a donc $(F_1 + F_2)^\perp \subset (F_1 + F_2)^\perp$.

Au total, $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$.

2. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que f est orthogonal (par rapport au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$) si et seulement pour tout $v \in E$, $\|f(v)\| = \|v\|$ (où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$).

Solution : Voir cours.

Exercice 4 Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel

$$F := \mathrm{Vect}\,\{(1, 0, -1), (-1, 2, 1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ par rapport au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

Solution : On note $v_1 := (1, 0, -1)$ et $v_2 := (-1, 2, 1)$. Les deux vecteurs v_1 et v_2 forment une famille libre et génératrice de F donc une base de F, à laquelle on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormale de F.

On pose

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &:= v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\epsilon_2 &:= v_2 - \frac{\langle v_2, \epsilon_1\rangle}{\|\epsilon_1\|^2}\epsilon_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\epsilon_2' &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et la famille $\{\epsilon_1, \epsilon_2'\}$ est alors une base orthogonale de F.

Si l'on pose enfin

$$\begin{aligned}
e_1 &:= \frac{\epsilon_1}{\|\epsilon_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
e_2 &:= \frac{\epsilon_2'}{\|\epsilon_2'\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

la famille $\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormale de F.