Algèbre bilinéaire, espaces euclidiens : Devoir surveillé n° 1 (23 novembre 2021)

Durée : 1h15. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 On considère les matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A et le polynôme minimal μ_A de A. En déduire que A est une matrice trigonalisable non diagonalisable.
2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A (pour chaque sous-espace caractéristique, en donner une base).
3. On note $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Sans calculer l'inverse de P, montrer que $P^{-1}AP = B$.
4. Sachant que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer la décomposition de Dunford de A.

Exercice 2 On considère la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que U est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.
2. Déterminer une réduction de Jordan de U.

Exercice 3 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$.
2. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que f est orthogonal (par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$) si et seulement pour tout $v \in E$, $\|f(v)\| = \|v\|$ (où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

Exercice 4 Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel

$$F := \mathrm{Vect}\,\{(1, 0, -1), (-1, 2, 1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ par rapport au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.