Chapitre 1 : Rappels et compléments sur la réduction des endomorphismes

I. Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

I. Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

I. Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

<u>But :</u> Déterminer la représentation matricielle la plus “simple” possible de f.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 1

- On dit que λ est une <u>valeur propre de f</u> s'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(v) = \lambda v$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 1

- On dit que λ est une valeur propre de f s'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(v) = 0_E$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 1

- On dit que λ est une valeur propre de f s'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(v) = 0_E$.
- Dans ce cas, on note $E_\lambda := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ le sous-espace propre de f associé à λ.

II. Valeurs propres et espaces propres

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 1

- On dit que λ est une valeur propre de f s'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(v) = 0_E$.
- Dans ce cas, on note $E_\lambda := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ le sous-espace propre de f associé à λ. Un vecteur non nul de E_λ est appelé vecteur propre.

II. Valeurs propres et espaces propres

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 1

- On dit que λ est une <u>valeur propre de f</u> s'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(v) = 0_E$.
- Dans ce cas, on note $E_\lambda := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ le <u>sous-espace propre</u> de f associé à λ. Un vecteur <u>non nul</u> de E_λ est appelé <u>vecteur propre</u>.
- On note $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

III. Polynôme caractéristique

III. Polynôme caractéristique

Proposition 2

λ est une valeur propre de f

Proposition 2

λ est une valeur propre de f ssi $\det\left(f - \lambda \mathrm{Id}_E\right) = 0$

Proposition 2

λ est une valeur propre de f ssi $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$ ssi λ est une racine du polynôme $\chi_f := \det(f - X\mathrm{Id}_E) \in \mathbb{K}[X]$,

III. Polynôme caractéristique

Proposition 2

λ est une valeur propre de f ssi $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$ ssi λ est une racine du polynôme $\chi_f := \det(f - X\mathrm{Id}_E) \in \mathbb{K}[X]$, appelé <u>polynôme caractéristique de f</u>.

Proposition 2

λ est une valeur propre de f ssi $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$ ssi λ est une racine du polynôme $\chi_f := \det(f - X\mathrm{Id}_E) \in \mathbb{K}[X]$, appelé <u>polynôme caractéristique de f</u>.

On note $n := \dim(E)$.

Proposition 2

λ est une valeur propre de f ssi $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$ ssi λ est une racine du polynôme $\chi_f := \det(f - X\mathrm{Id}_E) \in \mathbb{K}[X]$, appelé <u>polynôme caractéristique de f</u>.

On note $n := \dim(E)$.

Proposition 3

$\deg \chi_f = n$

III. Polynôme caractéristique

Proposition 2

λ est une valeur propre de f ssi $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$ ssi λ est une racine du polynôme $\chi_f := \det(f - X\mathrm{Id}_E) \in \mathbb{K}[X]$, appelé polynôme caractéristique de f.

On note $n := \dim(E)$.

Proposition 3

$\deg \chi_f = n$ et donc $\mathrm{Card}\ \mathrm{Sp}(f) \leq n$.

III. Polynôme caractéristique

Proposition 2

λ est une valeur propre de f ssi $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$ ssi λ est une racine du polynôme $\chi_f := \det(f - X\mathrm{Id}_E) \in \mathbb{K}[X]$, appelé <u>polynôme caractéristique de f</u>.

On note $n := \dim(E)$.

Proposition 3

$\deg \chi_f = n$ et donc $\mathrm{Card}\ \mathrm{Sp}(f) \leq n$.

Remarque 3

Attention au corps de base ! Si $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$.

IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est <u>diagonalisable</u> s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Théorème 5

- Les espaces propres de f sont en somme directe.

IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Théorème 5

- Les espaces propres de f sont en somme directe.
- f est diagonalisable ssi $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$

IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Théorème 5

- Les espaces propres de f sont en somme directe.
- f est diagonalisable ssi $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$ ssi $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}\right) = \dim(E)$.

IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Théorème 5

- Les espaces propres de f sont en somme directe.
- f est diagonalisable ssi $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$ ssi $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}\right) = \dim(E)$.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on note m_λ la multiplicité de λ dans χ_f.

IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est <u>diagonalisable</u> s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Théorème 5

- Les espaces propres de f sont en somme directe.
- f est diagonalisable ssi $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$ ssi $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}\right) = \dim(E)$.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on note m_λ la multiplicité de λ dans χ_f. On a $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$.

IV. Diagonalisabilité et diagonalisation

Définition 4

On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Théorème 5

- Les espaces propres de f sont en somme directe.
- f est diagonalisable ssi $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n} = E$ ssi $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}\right) = \dim(E)$.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on note m_λ la multiplicité de λ dans χ_f. On a $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$.

Théorème 6

f est diagonalisable ssi χ_f est scindé et, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $\dim\left(E_\lambda\right) = m_\lambda$.

Définition 7

On dit que f est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire.

V. Trigonalisabilité

Définition 7

On dit que f est <u>trigonalisable</u> s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire.

Théorème 8

f est trigonalisable ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

V. Trigonalisabilité

Définition 7

On dit que f est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire.

Théorème 8

f est trigonalisable ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 9

- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev est trigonalisable.

V. Trigonalisabilité

Définition 7

On dit que f est <u>trigonalisable</u> s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire.

Théorème 8

f est trigonalisable ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 9

- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev est trigonalisable.
- Toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire.

V. Trigonalisabilité

Définition 7

On dit que f est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire.

Théorème 8

f est trigonalisable ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 9

- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev est trigonalisable.
- Toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire.

On décrira à la fin de ce chapitre une méthode systématique de triangularisation d'un endomorphisme triangularisable : la réduction de Jordan.

Soit $P = a_N X^N + a_{N-1} X^{N-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.

Soit $P = a_N X^N + a_{N-1} X^{N-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On note $P(f)$ l'endomorphisme

$$a_N f^N + a_{N-1} f^{N-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E$$

de E.

Soit $P = a_N X^N + a_{N-1} X^{N-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On note $P(f)$ l'endomorphisme

$$a_N f^N + a_{N-1} f^{N-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E$$

de E.

Proposition 10

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

VI. Polynômes d'endomorphismes et polynômes annulateurs

Soit $P = a_N X^N + a_{N-1} X^{N-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On note $P(f)$ l'endomorphisme

$$a_N f^N + a_{N-1} f^{N-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E$$

de E.

Proposition 10

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda P + \mu Q)(f) = \lambda P(f) + \mu Q(f) \quad \text{et} \quad (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f).$$

Définition 11

On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

VI. Polynômes d'endomorphismes et polynômes annulateurs

Définition 11

On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Un premier lien entre polynômes annulateurs et réduction est donné par :

Définition 11

On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Un premier lien entre polynômes annulateurs et réduction est donné par :

Proposition 12

Si P annule f et $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $P(\lambda) = 0$.

VI. Polynômes d'endomorphismes et polynômes annulateurs

Définition 11

On dit que P est un <u>polynôme annulateur de f</u> si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Un premier lien entre polynômes annulateurs et réduction est donné par :

Proposition 12

Si P annule f et $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $P(\lambda) = 0$.

On montre ensuite le critère de diagonalisabilité suivant :

VI. Polynômes d'endomorphismes et polynômes annulateurs

Définition 11

On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Un premier lien entre polynômes annulateurs et réduction est donné par :

Proposition 12

Si P annule f et $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $P(\lambda) = 0$.

On montre ensuite le critère de diagonalisabilité suivant :

Théorème 13

f est diagonalisable ss'il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples.

VII. Polynôme minimal

On note $I_f := \{\text{polynômes annulateurs de } f\}$

VII. Polynôme minimal

On note $I_f := \{\text{polynômes annulateurs de } f\}$: I_f est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$

VII. Polynôme minimal

On note $I_f := \{\text{polynômes annulateurs de } f\}$: I_f est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$ et peut donc être engendré par un seul élément.

VII. Polynôme minimal

On note $I_f := \{\text{polynômes annulateurs de } f\}$: I_f est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$ et peut donc être engendré par un seul élément.

Définition 14

On note μ_f l'unique générateur unitaire de I_f, On note $I_f := \{\text{polynômes annulateurs de } f\}$: I_f est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$ et peut donc être engendré par un seul élément.

Définition 14

On note μ_f l'unique générateur unitaire de I_f, appelé polynôme minimal de f.

VII. Polynôme minimal

On note $I_f := \{\text{polynômes annulateurs de } f\}$: I_f est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$ et peut donc être engendré par un seul élément.

Définition 14

On note μ_f l'unique générateur unitaire de I_f, appelé polynôme minimal de f.

Par définition, les polynômes annulateurs de f sont les multiples de μ_f

VII. Polynôme minimal

On note $I_f := \{\text{polynômes annulateurs de } f\}$: I_f est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$ et peut donc être engendré par un seul élément.

Définition 14

On note μ_f l'unique générateur unitaire de I_f, appelé <u>polynôme minimal de f</u>.

Par définition, les polynômes annulateurs de f sont les multiples de μ_f i.e. μ_f est un diviseur de tout polynôme annulateur de f.

VII. Polynôme minimal

On note $I_f := \{\text{polynômes annulateurs de } f\}$: I_f est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$ et peut donc être engendré par un seul élément.

Définition 14

On note μ_f l'unique générateur unitaire de I_f, appelé
polynôme minimal de f.

Par définition, les polynômes annulateurs de f sont les multiples de μ_f i.e. μ_f est un diviseur de tout polynôme annulateur de f.
En particulier, μ_f divise χ_f :

VII. Polynôme minimal

On note $I_f := \{\text{polynômes annulateurs de } f\}$: I_f est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$ et peut donc être engendré par un seul élément.

Définition 14

On note μ_f l'unique générateur unitaire de I_f, appelé <u>polynôme minimal de f</u>.

Par définition, les polynômes annulateurs de f sont les multiples de μ_f i.e. μ_f est un diviseur de tout polynôme annulateur de f.
En particulier, μ_f divise χ_f :

Théorème 15 (Théorème de Cayley-Hamilton)

$$\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

VII. Polynôme minimal

On note $I_f := \{\text{polynômes annulateurs de } f\}$: I_f est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$ et peut donc être engendré par un seul élément.

Définition 14

On note μ_f l'unique générateur unitaire de I_f, appelé polynôme minimal de f.

Par définition, les polynômes annulateurs de f sont les multiples de μ_f i.e. μ_f est un diviseur de tout polynôme annulateur de f.
En particulier, μ_f divise χ_f :

Théorème 15 (Théorème de Cayley-Hamilton)

$$\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Corollaire 16

Les racines de μ_f sont exactement les racines de χ_f.

Remarque

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Alors

VII. Polynôme minimal

Remarque

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Alors

- $\chi_A^{\mathbb{C}} = \det(A - XI_n) = \chi_A^{\mathbb{R}}$ et $\mu_A^{\mathbb{C}} = \mu_A^{\mathbb{R}}$,

Remarque

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Alors

- $\chi_A^{\mathbb{C}} = \det(A - XI_n) = \chi_A^{\mathbb{R}}$ et $\mu_A^{\mathbb{C}} = \mu_A^{\mathbb{R}}$,
- μ_A et χ_A de $\mathbb{R}[X]$ ont les mêmes facteurs irréductibles.

VII. Polynôme minimal

Remarque

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Alors

- $\chi_A^{\mathbb{C}} = \det(A - XI_n) = \chi_A^{\mathbb{R}}$ et $\mu_A^{\mathbb{C}} = \mu_A^{\mathbb{R}}$,
- μ_A et χ_A de $\mathbb{R}[X]$ ont les mêmes facteurs irréductibles.

Le polynôme minimal donne lieu à un critère de diagonalisabilité de f :

VII. Polynôme minimal

Remarque

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Alors

- $\chi_A^{\mathbb{C}} = \det(A - XI_n) = \chi_A^{\mathbb{R}}$ et $\mu_A^{\mathbb{C}} = \mu_A^{\mathbb{R}}$,
- μ_A et χ_A de $\mathbb{R}[X]$ ont les mêmes facteurs irréductibles.

Le polynôme minimal donne lieu à un critère de diagonalisabilité de f :

Théorème 14

f est diagonalisable ssi μ_f est scindé à racines simples.

VIII. Réduction de Jordan des endomorphismes trigonalisables

On suppose f trigonalisable.

VIII. Réduction de Jordan des endomorphismes trigonalisables

On suppose f trigonalisable.
Nous allons montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

VIII. Réduction de Jordan des endomorphismes trigonalisables

On suppose f trigonalisable.
Nous allons montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$$

VIII. Réduction de Jordan des endomorphismes trigonalisables

On suppose f trigonalisable.
Nous allons montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$$

où, pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$, J_k est de la forme

VIII. Réduction de Jordan des endomorphismes trigonalisables

On suppose f trigonalisable.
Nous allons montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$$

où, pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$, J_k est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

VIII. Réduction de Jordan : blocs de Jordan

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$$

(λ-<u>bloc de Jordan</u> de taille m)

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$$

(λ-<u>bloc de Jordan</u> de taille m) puis, si $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$$

(λ-<u>bloc de Jordan</u> de taille m) puis, si $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$J_{m_1,\ldots,m_k}(\lambda) := \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m_1+\cdots+m_k}(\mathbb{K}).$$

VIII. Réduction de Jordan : le théorème

On suppose trigonalisable

VIII. Réduction de Jordan : le théorème

On suppose trigonalisable et on écrit

$$\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.

VIII. Réduction de Jordan : le théorème

On suppose trigonalisable et on écrit

$$\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.
Alors

VIII. Réduction de Jordan : le théorème

On suppose trigonalisable et on écrit

$$\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.
Alors

Théorème 15

Il existe une base $\mathcal{B}$ de E et, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, des entiers $m_1^i, \ldots, m_{k_i}^i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

VIII. Réduction de Jordan : le théorème

On suppose trigonalisable et on écrit

$$\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.
Alors

Théorème 15

Il existe une base $\mathcal{B}$ de E et, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, des entiers $m_1^i, \ldots, m_{k_i}^i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{m_1^1, \ldots, m_{k_1}^1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_1^p, \ldots, m_{k_p}^p}(\lambda_p) \end{pmatrix}.$$

VIII. Réduction de Jordan : le théorème

On suppose trigonalisable et on écrit

$$\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f.
Alors

Théorème 15

Il existe une base $\mathcal{B}$ de E et, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, des entiers $m_1^i, \ldots, m_{k_i}^i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{m_1^1, \ldots, m_{k_1}^1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_1^p, \ldots, m_{k_p}^p}(\lambda_p) \end{pmatrix}.$$

La matrice de droite est "unique" et est appelée forme de Jordan de f.

VIII.1. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

Définition 16

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_{\lambda_i}}$$

le sous-espace caractéristique de f associé à λ_i.

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$

Définition 16

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_{\lambda_i}}$$

le sous-espace caractéristique de f associé à λ_i.

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$ et $f\left(N_{\lambda_i}\right) \subset N_{\lambda_i}$.

Définition 16

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_{\lambda_i}}$$

le sous-espace caractéristique de f associé à λ_i.

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$ et $f\left(N_{\lambda_i}\right) \subset N_{\lambda_i}$. De plus,

Proposition 17

$$E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_p}.$$

Définition 16

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_{\lambda_i}}$$

le sous-espace caractéristique de f associé à λ_i.

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$ et $f\left(N_{\lambda_i}\right) \subset N_{\lambda_i}$. De plus,

Proposition 17

$$E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_p}.$$

Remarque

Cette propriété est donnée par le lemme des noyaux :

Définition 16

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ \left(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E\right)^{m_{\lambda_i}}$$

le <u>sous-espace caractéristique</u> de f associé à λ_i.

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$ et $f\left(N_{\lambda_i}\right) \subset N_{\lambda_i}$. De plus,

Proposition 17

$$E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_p}.$$

Remarque

Cette propriété est donnée par le <u>lemme des noyaux</u> : si $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux et $P := P_1 \cdots P_r$ alors

Définition 16

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on note

$$N_{\lambda_i} := \mathrm{Ker}\ (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_{\lambda_i}}$$

le sous-espace caractéristique de f associé à λ_i.

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$ et $f(N_{\lambda_i}) \subset N_{\lambda_i}$. De plus,

Proposition 17

$$E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_p}.$$

Remarque

Cette propriété est donnée par le lemme des noyaux : si $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux et $P := P_1 \cdots P_r$ alors

$$\mathrm{Ker}\ P(f) = \mathrm{Ker}\ P_1(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\ P_r(f).$$

Conséquence de Prop. 17 :

Conséquence de Prop. 17 : Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de N_{λ_i}

Conséquence de Prop. 17 : Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de N_{λ_i} et soit $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$, Conséquence de Prop. 17 : Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de N_{λ_i} et soit $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p\}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\lambda_p} \end{pmatrix}$$

où $A_{\lambda_i} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right)$, $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Conséquence de Prop. 17 : Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de N_{λ_i} et soit $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p\}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\lambda_p} \end{pmatrix}$$

où $A_{\lambda_i} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right)$, $i \in \{1, \ldots, p\}$.

De plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$,

$$f_{|N_{\lambda_i}} = \lambda_i \mathrm{Id}_{N_{\lambda_i}} + (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)_{|N_{\lambda_i}}$$

VIII.1. Réduction suivant les sous-espaces caractéristiques

Conséquence de Prop. 17 : Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de N_{λ_i} et soit $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p\}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\lambda_p} \end{pmatrix}$$

où $A_{\lambda_i} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right)$, $i \in \{1, \ldots, p\}$.

De plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$,

$$f_{|N_{\lambda_i}} = \lambda_i \mathrm{Id}_{N_{\lambda_i}} + (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)_{|N_{\lambda_i}}$$

et $(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)_{|N_{\lambda_i}}$ est nilpotent.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 18

On dit que u est nilpotent s'il existe $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $u^l = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

VIII.2. Réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 18

On dit que u est nilpotent s'il existe $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $u^l = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Le plus petit entier $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $u^\nu = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est appelé indice de nilpotence de u.

VIII.2. Réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 18

On dit que u est nilpotent s'il existe $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $u^l = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Le plus petit entier $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $u^\nu = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est appelé indice de nilpotence de u.

Exemple : Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_f$ alors $f_{|N_\lambda} - \lambda \mathrm{Id}_{N_\lambda} = (f - \lambda \mathrm{Id}_E)_{|N_\lambda} \in \mathcal{L}(N_\lambda)$ est nilpotent.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 18

On dit que u est nilpotent s'il existe $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $u^l = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Le plus petit entier $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $u^\nu = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est appelé indice de nilpotence de u.

Exemple : Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_f$ alors $f_{|N_\lambda} - \lambda \mathrm{Id}_{N_\lambda} = (f - \lambda \mathrm{Id}_E)_{|N_\lambda} \in \mathcal{L}(N_\lambda)$ est nilpotent.

Théorème 19

Si u est nilpotent, il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E et des entiers $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

VIII.2. Réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 18

On dit que u est nilpotent s'il existe $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $u^l = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Le plus petit entier $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $u^\nu = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est appelé indice de nilpotence de u.

Exemple : Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_f$ alors $f_{|N_\lambda} - \lambda \mathrm{Id}_{N_\lambda} = (f - \lambda \mathrm{Id}_E)_{|N_\lambda} \in \mathcal{L}(N_\lambda)$ est nilpotent.

Théorème 19

Si u est nilpotent, il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E et des entiers $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}(0) \end{pmatrix}.$$

Conséquence du théorème 19 : Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de N_{λ_i} et des $m_1^i, \ldots, m_{k_i}^i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

VIII.3. Réduction de Jordan des restrictions de f

Conséquence du théorème 19 : Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de N_{λ_i} et des $m_1^i, \ldots, m_{k_i}^i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{N_{\lambda_i}}\right) = \begin{pmatrix} J_{m_1^i}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_{k_i}^i}(0) \end{pmatrix},$$

Conséquence du théorème 19 : Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de N_{λ_i} et des $m_1^i, \ldots, m_{k_i}^i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{N_{\lambda_i}}\right) = \begin{pmatrix} J_{m_1^i}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_{k_i}^i}(0) \end{pmatrix},$$

et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right) \quad =$$

VIII.3. Réduction de Jordan des restrictions de f

<u>Conséquence du théorème 19 :</u> Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de N_{λ_i} et des $m_1^i, \ldots, m_{k_i}^i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{N_{\lambda_i}}\right) = \begin{pmatrix} J_{m_1^i}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_{k_i}^i}(0) \end{pmatrix},$$

et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(\lambda_i Id_{N_{\lambda_i}}\right) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f_{|N_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{N_{\lambda_i}}\right)$$

Conséquence du théorème 19 : Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de N_{λ_i} et des $m_1^i, \ldots, m_{k_i}^i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{N_{\lambda_i}}\right) = \begin{pmatrix} J_{m_1^i}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_{k_i}^i}(0) \end{pmatrix},$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(\lambda_i Id_{N_{\lambda_i}}\right) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f_{|N_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{N_{\lambda_i}}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_{m_1^i}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_{k_i}^i}(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conséquence du théorème 19 : Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de N_{λ_i} et des $m_1^i, \ldots, m_{k_i}^i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{N_{\lambda_i}}\right) = \begin{pmatrix} J_{m_1^i}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_{k_i}^i}(0) \end{pmatrix},$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(f_{|N_{\lambda_i}}\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\left(\lambda_i Id_{N_{\lambda_i}}\right) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f_{|N_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{N_{\lambda_i}}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_{m_1^i}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_{k_i}^i}(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_{m_1^i}(\lambda_i) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_{k_i}^i}(\lambda_i) \end{pmatrix} = J_{m_1^i, \ldots, m_{k_i}^i}(\lambda_i) \end{aligned}$$

On pose alors $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$ et on a

On pose alors $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$ et on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{m_1^1,\dots,m_{k_1}^1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_1^p,\dots,m_{k_p}^p}(\lambda_p) \end{pmatrix}.$$

VIII.5. Réduction de Jordan : résumé

VIII.5. Réduction de Jordan : résumé

Etape 1 : Déterminer les sous-espaces caractéristiques $N_{\lambda_1}, \dots, N_{\lambda_p}$ de l'endomorphisme trigonalisable f.

VIII.5. Réduction de Jordan : résumé

Etape 1 : Déterminer les sous-espaces caractéristiques $N_{\lambda_1}, \ldots, N_{\lambda_p}$ de l'endomorphisme trigonalisable f.

Etape 2 : Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, déterminer une base $\mathcal{B}_i$ de N_{λ_i} dans laquelle la matrice de l'endomorphisme nilpotent $f_{|N_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{N_{\lambda_i}}$ est sous forme de Jordan.

VIII.5. Réduction de Jordan : résumé

Etape 1 : Déterminer les sous-espaces caractéristiques $N_{\lambda_1}, \dots, N_{\lambda_p}$ de l'endomorphisme trigonalisable f.

Etape 2 : Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, déterminer une base $\mathcal{B}_i$ de N_{λ_i} dans laquelle la matrice de l'endomorphisme nilpotent $f_{|N_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{N_{\lambda_i}}$ est sous forme de Jordan.

Etape 3 : Poser $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est alors sous forme de Jordan.

IX. Décomposition de Dunford des endomorphismes trigonalisables

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable.

IX. Décomposition de Dunford des endomorphismes trigonalisables

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable.
On a montré au passage la propriété suivante :

IX. Décomposition de Dunford des endomorphismes trigonalisables

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable.
On a montré au passage la propriété suivante :

Théorème 20

Il existe un unique $g \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et un unique $h \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tels que $g \circ h = h \circ g$ et

IX. Décomposition de Dunford des endomorphismes trigonalisables

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable.
On a montré au passage la propriété suivante :

Théorème 20

Il existe un unique $g \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et un unique $h \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tels que $g \circ h = h \circ g$ et

$$f = g + h.$$

IX. Décomposition de Dunford des endomorphismes trigonalisables

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable.
On a montré au passage la propriété suivante :

Théorème 20

Il existe un unique $g \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et un unique $h \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tels que $g \circ h = h \circ g$ et

$$f = g + h.$$

Cette décomposition est appelée la décomposition de Dunford de f.

IX. Décomposition de Dunford des endomorphismes trigonalisables

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable.
On a montré au passage la propriété suivante :

Théorème 20

Il existe un unique $g \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et un unique $h \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tels que $g \circ h = h \circ g$ et

$$f = g + h.$$

Cette décomposition est appelée la décomposition de Dunford de f.

Application :

IX. Décomposition de Dunford des endomorphismes trigonalisables

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable.
On a montré au passage la propriété suivante :

Théorème 20

Il existe un unique $g \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et un unique $h \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tels que $g \circ h = h \circ g$ et

$$f = g + h.$$

Cette décomposition est appelée la décomposition de Dunford de f.

Application : Si $k \in \mathbb{N}$,

$$f^k$$

IX. Décomposition de Dunford des endomorphismes trigonalisables

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable.
On a montré au passage la propriété suivante :

Théorème 20

Il existe un unique $g \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et un unique $h \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tels que $g \circ h = h \circ g$ et

$$f = g + h.$$

Cette décomposition est appelée la décomposition de Dunford de f.

Application : Si $k \in \mathbb{N}$,

$$f^k = (g+h)^k$$

IX. Décomposition de Dunford des endomorphismes trigonalisables

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable.
On a montré au passage la propriété suivante :

Théorème 20

Il existe un unique $g \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et un unique $h \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tels que $g \circ h = h \circ g$ et

$$f = g + h.$$

Cette décomposition est appelée la décomposition de Dunford de f.

Application : Si $k \in \mathbb{N}$,

$$f^k = (g+h)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g^{k-i} h^i$$

IX. Décomposition de Dunford des endomorphismes trigonalisables

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable.
On a montré au passage la propriété suivante :

Théorème 20

Il existe un unique $g \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et un unique $h \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tels que $g \circ h = h \circ g$ et

$$f = g + h.$$

Cette décomposition est appelée la décomposition de Dunford de f.

Application : Si $k \in \mathbb{N}$,

$$f^k = (g+h)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g^{k-i} h^i = \sum_{i=0}^{\nu-1} \binom{k}{i} g^{k-i} h^i$$

si ν désigne l'indice de nilpotence de h et $k \geq \nu - 1$.