Chapitre 5 : Formes bilinéaires et formes quadratiques

I. Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2, soit E un $\mathbb{K}$-ev.

I. Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2, soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$.

I. Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2, soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$.

Définition 1

On dit que φ est

I. Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2, soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$.

Définition 1

On dit que φ est

- bilinéaire si $\forall v, w, v_1, w_1, v_2, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
  $\varphi\left(\lambda v_1 + \mu v_2, w\right) = \lambda\varphi\left(v_1, w\right) + \mu\varphi\left(v_2, w\right)$ et
  $\varphi\left(v, \lambda w_1 + \mu w_2\right) = \lambda\varphi\left(v, w_1\right) + \mu\varphi\left(v, w_2\right)$,

I. Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2, soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$.

Définition 1

On dit que φ est

- bilinéaire si $\forall v, w, v_1, w_1, v_2, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\varphi(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \lambda \varphi(v_1, w) + \mu \varphi(v_2, w)$ et $\varphi(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda \varphi(v, w_1) + \mu \varphi(v, w_2)$,
- symétrique si $\forall v, w \in E$, $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$

I. Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2, soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$.

Définition 1

On dit que φ est

- bilinéaire si $\forall v, w, v_1, w_1, v_2, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\varphi(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \lambda\varphi(v_1, w) + \mu\varphi(v_2, w)$ et $\varphi(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda\varphi(v, w_1) + \mu\varphi(v, w_2)$,
- symétrique si $\forall v, w \in E$, $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$

On étudie les propriétés des formes bilinéaires et formes bilinéaires symétriques (non nécessairement définies ou “positives”).

On note $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des f.b. sur E

II. Formes bilinéaires et f.b.s

On note $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des f.b. sur E et $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des f.b.s. sur E.

On note $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des f.b. sur E et $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des f.b.s. sur E.

Proposition 2

$\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{S}(E)$ sont des $\mathbb{K}$-ev.

On note $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des f.b. sur E et $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des f.b.s. sur E.

Proposition 2

$\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{S}(E)$ sont des $\mathbb{K}$-ev.

On suppose que $\varphi \in \mathcal{B}(E)$. Alors

On note $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des f.b. sur E et $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des f.b.s. sur E.

Proposition 2

$\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{S}(E)$ sont des $\mathbb{K}$-ev.

On suppose que $\varphi \in \mathcal{B}(E)$. Alors

Lemme 3

Pour tous $v, w \in E$,

$$\varphi(v+w, v+w) = \varphi(v, v) + \varphi(v, w) + \varphi(w, v) + \varphi(w, w).$$

On note $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des f.b. sur E et $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des f.b.s. sur E.

Proposition 2

$\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{S}(E)$ sont des $\mathbb{K}$-ev.

On suppose que $\varphi \in \mathcal{B}(E)$. Alors

Lemme 3

Pour tous $v, w \in E$,

$$\varphi(v+w, v+w) = \varphi(v,v) + \varphi(v,w) + \varphi(w,v) + \varphi(w,w).$$

Si $\varphi \in \mathcal{S}(E)$, $\varphi(v+w, v+w) = \varphi(v,v) + 2\varphi(v,w) + \varphi(w,w)$.

On suppose dans la suite que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

On suppose dans la suite que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $v, w \in E$.

On suppose dans la suite que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $v, w \in E$. Notons
$X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$, $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$,

On suppose dans la suite que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $v, w \in E$. Notons
$X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$, $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$, et $A := \big(\varphi(e_k, e_l)\big)_{1 \leq k, l \leq n}$.

On suppose dans la suite que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$, $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$, et $A := \big(\varphi(e_k, e_l)\big)_{1 \leq k, l \leq n}$.
Alors

$$\varphi(v, w) = {}^t X A Y.$$

On suppose dans la suite que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $v, w \in E$. Notons
$X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$, $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$, et $A := \big(\varphi(e_k, e_l)\big)_{1 \leq k, l \leq n}$.
Alors

$$\varphi(v, w) = {}^tXAY.$$

Définition 4

On appelle <u>matrice représentative de la f.b. φ dans la base $\mathcal{B}$</u> et on note $\mathrm{Mat}^{\mathrm{fb}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ la matrice A.

On suppose dans la suite que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$, $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$, et $A := \big(\varphi(e_k, e_l)\big)_{1 \leq k, l \leq n}$.
Alors

$$\varphi(v, w) = {}^tXAY.$$

Définition 4

On appelle matrice représentative de la f.b. φ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$ la matrice A.

Proposition 5

Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E,

II. Formes bilinéaires et f.b.s

On suppose dans la suite que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $v, w \in E$. Notons
$X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$, $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$, et $A := \big(\varphi(e_k, e_l)\big)_{1 \leq k, l \leq n}$.
Alors

$$\varphi(v, w) = {}^t XAY.$$

Définition 4

On appelle matrice représentative de la f.b. φ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$ la matrice A.

Proposition 5

Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}^{\mathrm{fb}}(\varphi) = {}^t P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi) \, P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}.$$

Avec $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$,

Avec $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$,

Proposition 5

$\varphi \in \mathcal{S}(E)$ ssi ${}^tA = A$.

Avec $A := \mathrm{Mat}^{\mathrm{fb}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$,

Proposition 5

$\varphi \in \mathcal{S}(E)$ ssi ${}^tA = A$.

On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{K}) := \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tM = M\}$.

Avec $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$,

Proposition 5

$\varphi \in \mathcal{S}(E)$ ssi ${}^tA = A$.

On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{K}) := \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tM = M\}$.

Corollaire 6

L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(E) & \to & \mathrm{S}_n(\mathbb{K}) \\ \phi & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\phi) \end{array}$ est un isomorphisme linéaire.

Avec $A := \mathrm{Mat}^{\mathrm{fb}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$,

Proposition 5

$\varphi \in \mathcal{S}(E)$ ssi ${}^tA = A$.

On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{K}) := \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tM = M\}$.

Corollaire 6

L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(E) & \to & \mathrm{S}_n(\mathbb{K}) \\ \phi & \mapsto & \mathrm{Mat}^{\mathrm{fb}}_{\mathcal{B}}(\phi) \end{array}$ est un isomorphisme linéaire.

Remarque : Ainsi, $\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

III. Formes quadratiques

III. Formes quadratiques

Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une application.

III. Formes quadratiques

Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une application.

Définition 7

On dit que q est une <u>forme quadratique sur E</u> si

III. Formes quadratiques

Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une application.

Définition 7

On dit que q est une forme quadratique sur E si

1. $\forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$,

Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une application.

Définition 7

On dit que q est une forme quadratique sur E si

1. $\forall v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$,
2. l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{K} \\ (v, w) & \mapsto & \dfrac{1}{2}\big(q(v+w) - q(v) - q(w)\big) \end{array}$ est une f.b.s.

III. Formes quadratiques

Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une application.

Définition 7

On dit que q est une forme quadratique sur E si

1. $\forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$,
2. l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{K} \\ (v, w) & \mapsto & \dfrac{1}{2}\big(q(v+w) - q(v) - q(w)\big) \end{array}$ est une f.b.s.

Dans ce cas, on appelle φ la forme polaire de q.

III. Formes quadratiques

Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une application.

Définition 7

On dit que q est une forme quadratique sur E si

1. $\forall v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$,
2. l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{K} \\ (v, w) & \mapsto & \frac{1}{2}\big(q(v+w) - q(v) - q(w)\big) \end{array}$ est une f.b.s.

Dans ce cas, on appelle φ la forme polaire de q.

Exemple 8

Si φ est une f.b.s sur E,

III. Formes quadratiques

Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une application.

Définition 7

On dit que q est une forme quadratique sur E si

1. $\forall v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$,
2. l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{K} \\ (v, w) & \mapsto & \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w)) \end{array}$ est une f.b.s.

Dans ce cas, on appelle φ la forme polaire de q.

Exemple 8

Si φ est une f.b.s sur E, l'application $q : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ v & \mapsto & \varphi(v, v) \end{array}$ est une forme quadratique sur E

III. Formes quadratiques

Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une application.

Définition 7

On dit que q est une forme quadratique sur E si

1. $\forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$,
2. l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{K} \\ (v, w) & \mapsto & \dfrac{1}{2}\big(q(v+w) - q(v) - q(w)\big) \end{array}$ est une f.b.s.

Dans ce cas, on appelle φ la forme polaire de q.

Exemple 8

Si φ est une f.b.s sur E, l'application $q : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ v & \mapsto & \varphi(v, v) \end{array}$ est une forme quadratique sur E (appelée forme quadratique de φ).

Si on note $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E, on a en fait :

III. Formes quadratiques

Si on note $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E, on a en fait :

Théorème 9

$\mathcal{Q}(E)$ est un $\mathbb{K}$-ev isomorphe à $\mathcal{S}(E)$.

Si on note $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E, on a en fait :

Théorème 9

$\mathcal{Q}(E)$ est un $\mathbb{K}$-ev isomorphe à $\mathcal{S}(E)$.

Remarque : Ainsi, $\dim \mathcal{Q}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Si on note $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E, on a en fait :

Théorème 9

$\mathcal{Q}(E)$ est un $\mathbb{K}$-ev isomorphe à $\mathcal{S}(E)$.

Remarque : Ainsi, $\dim \mathcal{Q}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Si q est une forme quadratique de forme polaire φ, on a les identités suivantes :

Si on note $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E, on a en fait :

Théorème 9

$\mathcal{Q}(E)$ est un $\mathbb{K}$-ev isomorphe à $\mathcal{S}(E)$.

Remarque : Ainsi, $\dim \mathcal{Q}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Si q est une forme quadratique de forme polaire φ, on a les identités suivantes :

Proposition 10

Pour tous $v, w \in E$,

III. Formes quadratiques

Si on note $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E, on a en fait :

Théorème 9

$\mathcal{Q}(E)$ est un $\mathbb{K}$-ev isomorphe à $\mathcal{S}(E)$.

Remarque : Ainsi, $\dim \mathcal{Q}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Si q est une forme quadratique de forme polaire φ, on a les identités suivantes :

Proposition 10

Pour tous $v, w \in E$,

- $q(v+w) = q(v) + 2\varphi(v,w) + q(w)$,

III. Formes quadratiques

Si on note $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E, on a en fait :

Théorème 9

$\mathcal{Q}(E)$ est un $\mathbb{K}$-ev isomorphe à $\mathcal{S}(E)$.

Remarque : Ainsi, $\dim \mathcal{Q}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Si q est une forme quadratique de forme polaire φ, on a les identités suivantes :

Proposition 10

Pour tous $v, w \in E$,

- $q(v+w) = q(v) + 2\varphi(v,w) + q(w)$,
- $q(v+w) + q(v-w) = 2\big(q(v) + q(w)\big)$,

Si on note $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E, on a en fait :

Théorème 9

$\mathcal{Q}(E)$ est un $\mathbb{K}$-ev isomorphe à $\mathcal{S}(E)$.

Remarque : Ainsi, $\dim \mathcal{Q}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Si q est une forme quadratique de forme polaire φ, on a les identités suivantes :

Proposition 10

Pour tous $v, w \in E$,

- $q(v+w) = q(v) + 2\varphi(v,w) + q(w)$,
- $q(v+w) + q(v-w) = 2\big(q(v) + q(w)\big)$,
- $\varphi(v,w) = \frac{1}{4}\big(q(v+w) - q(v-w)\big)$.

Remarque : Si

Remarque : Si

- $v = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $w = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \in E$,

Remarque : Si

- $v = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $w = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \in E$,
- pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k := \varphi(e_k, e_k)$,

Remarque : Si

- $v = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $w = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \in E$,
- pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k := \varphi(e_k, e_k)$,
- pour $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $k < l$, $a_{k,l} := \varphi(e_k, e_l) = \varphi(e_l, e_k)$,

Remarque : Si

- $v = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $w = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \in E$,
- pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $a_k := \varphi(e_k, e_k)$,
- pour $k, l \in \{1, \dots, n\}$ tels que $k < l$, $a_{k,l} := \varphi(e_k, e_l) = \varphi(e_l, e_k)$,

on a

$$\varphi(v, w) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k y_k + \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{k,l} \big(x_k y_l + x_l y_k \big)$$

Remarque : Si

- $v = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $w = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \in E$,
- pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $a_k := \varphi(e_k, e_k)$,
- pour $k, l \in \{1, \dots, n\}$ tels que $k < l$, $a_{k,l} := \varphi(e_k, e_l) = \varphi(e_l, e_k)$,

on a

$$\varphi(v, w) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, x_k y_k + \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{k,l} \big(x_k y_l + x_l y_k \big)$$

et

$$q(v) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{k,l} \, x_k x_l .$$

IV. Orthogonalité

IV. Orthogonalité

Soit φ une f.b.s. sur E de forme quadratique q.

IV. Orthogonalité

Soit φ une f.b.s. sur E de forme quadratique q. Soient $v, w \in E$.

IV. Orthogonalité

Soit φ une f.b.s. sur E de forme quadratique q. Soient $v, w \in E$.

Définition 11

On dit que v et w sont orthogonaux relativement à φ si $\varphi(v, w) = 0$.

Soit φ une f.b.s. sur E de forme quadratique q. Soient $v, w \in E$.

Définition 11

On dit que v et w sont orthogonaux relativement à φ si $\varphi(v, w) = 0$.

Si $A \subset E$,

Soit φ une f.b.s. sur E de forme quadratique q. Soient $v, w \in E$.

Définition 11

On dit que v et w sont <u>orthogonaux relativement à φ</u> si $\varphi(v, w) = 0$.

Si $A \subset E$, on appelle <u>orthogonal de A relativ. à φ</u> le sev

IV. Orthogonalité

Soit φ une f.b.s. sur E de forme quadratique q. Soient $v, w \in E$.

Définition 11

On dit que v et w sont orthogonaux relativement à φ si $\varphi(v, w) = 0$.

Si $A \subset E$, on appelle orthogonal de A relativ. à φ le sev

$$A^{\perp_\varphi} := \{v \in E \mid \forall w \in A,\ \varphi(v, w) = 0\}$$

de E.

IV. Orthogonalité

Soit φ une f.b.s. sur E de forme quadratique q. Soient $v, w \in E$.

Définition 11

On dit que v et w sont orthogonaux relativement à φ si $\varphi(v, w) = 0$.

Si $A \subset E$, on appelle orthogonal de A relativ. à φ le sev

$$A^{\perp_\varphi} := \{v \in E \mid \forall w \in A,\ \varphi(v, w) = 0\}$$

de E.

Proposition 12

- Si $B \subset E$ tel que $A \subset B$, alors $B^{\perp_\varphi} \subset A^{\perp_\varphi}$,

IV. Orthogonalité

Soit φ une f.b.s. sur E de forme quadratique q. Soient $v, w \in E$.

Définition 11

On dit que v et w sont orthogonaux relativement à φ si $\varphi(v, w) = 0$.

Si $A \subset E$, on appelle orthogonal de A relativ. à φ le sev

$$A^{\perp_\varphi} := \{v \in E \mid \forall w \in A,\ \varphi(v, w) = 0\}$$

de E.

Proposition 12

- Si $B \subset E$ tel que $A \subset B$, alors $B^{\perp_\varphi} \subset A^{\perp_\varphi}$,
- $A^{\perp_\varphi} = (\mathrm{Vect}(A))^{\perp_\varphi}$.

IV. Orthogonalité

Soit φ une f.b.s. sur E de forme quadratique q. Soient $v, w \in E$.

Définition 11

On dit que v et w sont orthogonaux relativement à φ si $\varphi(v, w) = 0$.

Si $A \subset E$, on appelle orthogonal de A relativ. à φ le sev

$$A^{\perp_\varphi} := \{v \in E \mid \forall w \in A,\ \varphi(v, w) = 0\}$$

de E.

Proposition 12

- Si $B \subset E$ tel que $A \subset B$, alors $B^{\perp_\varphi} \subset A^{\perp_\varphi}$,
- $A^{\perp_\varphi} = (\mathrm{Vect}(A))^{\perp_\varphi}$.

On appelle $E^{\perp_\varphi}$ le noyau de φ

Soit φ une f.b.s. sur E de forme quadratique q. Soient $v, w \in E$.

Définition 11

On dit que v et w sont orthogonaux relativement à φ si $\varphi(v, w) = 0$.

Si $A \subset E$, on appelle orthogonal de A relativ. à φ le sev

$$A^{\perp_\varphi} := \{v \in E \mid \forall w \in A,\ \varphi(v, w) = 0\}$$

de E.

Proposition 12

- Si $B \subset E$ tel que $A \subset B$, alors $B^{\perp_\varphi} \subset A^{\perp_\varphi}$,
- $A^{\perp_\varphi} = (\mathrm{Vect}(A))^{\perp_\varphi}$.

On appelle $E^{\perp_\varphi}$ le noyau de φ et on note $\mathrm{Ker}_\varphi := E^{\perp_\varphi}$.

Définition 13

On dit que φ est

Définition 13

On dit que φ est

- non dégénérée si $\mathrm{Ker}_\varphi = \{0_E\}$,

Définition 13

On dit que φ est

- non dégénérée si $\mathrm{Ker}_\varphi = \{0_E\}$,
- définie si, pour tout $v \in E$, $q(v) = \varphi(v, v) = 0$ ssi $v = 0_E$.

IV. Orthogonalité

Définition 13

On dit que φ est

- non dégénérée si $\mathrm{Ker}_\varphi = \{0_E\}$,
- définie si, pour tout $v \in E$, $q(v) = \varphi(v, v) = 0$ ssi $v = 0_E$.

Proposition 14

Si φ est définie, alors φ est non dégénérée.

Définition 13

On dit que φ est

- non dégénérée si $\mathrm{Ker}_\varphi = \{0_E\}$,
- définie si, pour tout $v \in E$, $q(v) = \varphi(v, v) = 0$ ssi $v = 0_E$.

Proposition 14

Si φ est définie, alors φ est non dégénérée.

Remarque : La réciproque est fausse !

Définition 15

On appelle rang de φ la quantité

Définition 15

On appelle rang de φ la quantité

$$\mathrm{rg}_{\varphi} := \dim(E) - \dim\left(\mathrm{Ker}_{\varphi}\right) = n - \dim\left(\mathrm{Ker}_{\varphi}\right)$$

Définition 15

On appelle rang de φ la quantité

$$\mathrm{rg}_\varphi := \dim(E) - \dim\left(\mathrm{Ker}_\varphi\right) = n - \dim\left(\mathrm{Ker}_\varphi\right)$$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et notons $A := \mathrm{Mat}^{\mathrm{fb}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Définition 15

On appelle <u>rang de φ</u> la quantité

$$\mathrm{rg}_\varphi := \dim(E) - \dim\left(\mathrm{Ker}_\varphi\right) = n - \dim\left(\mathrm{Ker}_\varphi\right)$$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et notons $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$. Alors :

Proposition 16

- $\forall \in E$, $v \in \mathrm{Ker}_\varphi$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \in \mathrm{Ker}\, A$,

Définition 15

On appelle <u>rang de φ</u> la quantité

$$\mathrm{rg}_\varphi := \dim(E) - \dim\left(\mathrm{Ker}_\varphi\right) = n - \dim\left(\mathrm{Ker}_\varphi\right)$$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et notons $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$. Alors :

Proposition 16

- $\forall \in E$, $v \in \mathrm{Ker}_\varphi$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \in \mathrm{Ker}\, A$,
- $\mathrm{rg}_\varphi = \mathrm{rg}(A)$.

V. Bases orthogonales

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

V. Bases orthogonales

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 17

On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativ. à φ si

V. Bases orthogonales

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 17

On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativ. à φ si pour tous $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $k \neq l$, $\varphi(e_k, e_l) = 0$.

V. Bases orthogonales

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 17

On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativ. à φ si pour tous $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $k \neq l$, $\varphi(e_k, e_l) = 0$.

Remarque : La notion de "base orthonormale" n'a pas de sens ici !

V. Bases orthogonales

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 17

On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativ. à φ si pour tous $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $k \neq l$, $\varphi(e_k, e_l) = 0$.

Remarque : La notion de "base orthonormale" n'a pas de sens ici !

Proposition 18

$\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativement à φ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$ est diagonale.

V. Bases orthogonales

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 17

On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativ. à φ si pour tous $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $k \neq l$, $\varphi(e_k, e_l) = 0$.

Remarque : La notion de "base orthonormale" n'a pas de sens ici !

Proposition 18

$\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativement à φ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$ est diagonale.

Remarque : Si $\mathcal{B}$ est orthogonale et si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ alors,

V. Bases orthogonales

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 17

On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativ. à φ si pour tous $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $k \neq l$, $\varphi(e_k, e_l) = 0$.

Remarque : La notion de "base orthonormale" n'a pas de sens ici !

Proposition 18

$\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativement à φ ssi $\mathrm{Mat}^{\mathrm{fb}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale.

Remarque : Si $\mathcal{B}$ est orthogonale et si $\mathrm{Mat}^{\mathrm{fb}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ alors,

$\forall v = \sum_{k=1}^n x_k e_k,\ w = \sum_{k=1}^n y_k e_k \in E,$

V. Bases orthogonales

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 17

On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativ. à φ si pour tous $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $k \neq l$, $\varphi(e_k, e_l) = 0$.

Remarque : La notion de "base orthonormale" n'a pas de sens ici !

Proposition 18

$\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativement à φ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$ est diagonale.

Remarque : Si $\mathcal{B}$ est orthogonale et si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ alors,

$\forall v = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,\ w = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \in E,$

$$\varphi(v, w) = a_1 x_1 y_1 + \cdots + a_n x_n y_n$$

V. Bases orthogonales

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 17

On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativ. à φ si pour tous $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $k \neq l$, $\varphi(e_k, e_l) = 0$.

Remarque : La notion de "base orthonormale" n'a pas de sens ici !

Proposition 18

$\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativement à φ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$ est diagonale.

Remarque : Si $\mathcal{B}$ est orthogonale et si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ alors,

$\forall v = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,\ w = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \in E,$

$$\varphi(v, w) = a_1 x_1 y_1 + \cdots + a_n x_n y_n$$

et

$$q(v) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2.$$

Proposition 19

Si $\mathcal{B}$ est orthogonale et si $\mathrm{Mat}^{\mathrm{fb}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$,

V. Bases orthogonales

Proposition 19

Si $\mathcal{B}$ est orthogonale et si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, le rang de φ est le nombre de coefficients diagonaux non nuls.

V. Bases orthogonales

Proposition 19

Si $\mathcal{B}$ est orthogonale et si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, le rang de φ est le nombre de coefficients diagonaux non nuls.

Théorème 20

E possède des bases orthogonales relativ. à φ.

V. Bases orthogonales

Proposition 19

Si $\mathcal{B}$ est orthogonale et si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, le rang de φ est le nombre de coefficients diagonaux non nuls.

Théorème 20

E possède des bases orthogonales relativ. à φ.

<u>Remarque :</u> Une famille libre orthogonale relativ. à φ peut <u>ne pas</u> être complétée en une base orthogonale relativ. à φ.

VI. Réduction de Gauss d'une forme quadratique

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

VI. Réduction de Gauss d'une forme quadratique

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On présente ici une méthode pour déterminer une base orthogonale de E relativ. à φ.

VI. Réduction de Gauss d'une forme quadratique

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On présente ici une méthode pour déterminer une base orthogonale de E relativ. à φ.

1ère étape : La réduction de Gauss

VI. Réduction de Gauss d'une forme quadratique

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On présente ici une méthode pour déterminer une base orthogonale de E relativ. à φ.

1ère étape : La réduction de Gauss

Théorème 21

Il existe n formes linéaires $l_1, \ldots, l_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ linéairement indépendantes

VI. Réduction de Gauss d'une forme quadratique

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On présente ici une méthode pour déterminer une base orthogonale de E relativ. à φ.

<u>1ère étape :</u> La réduction de Gauss

Théorème 21

Il existe n formes linéaires $l_1, \ldots, l_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ linéairement indépendantes et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

VI. Réduction de Gauss d'une forme quadratique

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On présente ici une méthode pour déterminer une base orthogonale de E relativ. à φ.

1ère étape : La réduction de Gauss

Théorème 21

Il existe n formes linéaires $l_1, \ldots, l_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ linéairement indépendantes et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall v \in E,\ q(v) = \alpha_1 \big(l_1(v)\big)^2 + \cdots + \alpha_n \big(l_n(v)\big)^2.$$

VI. Réduction de Gauss d'une forme quadratique

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On présente ici une méthode pour déterminer une base orthogonale de E relativ. à φ.

1ère étape : La réduction de Gauss

Théorème 21

Il existe n formes linéaires $l_1, \dots, l_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ linéairement indépendantes et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall v \in E,\ q(v) = \alpha_1 \big(l_1(v)\big)^2 + \cdots + \alpha_n \big(l_n(v)\big)^2.$$

Preuve :

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On présente ici une méthode pour déterminer une base orthogonale de E relativ. à φ.

1ère étape : La réduction de Gauss

Théorème 21

Il existe n formes linéaires $l_1, \ldots, l_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ linéairement indépendantes et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall v \in E, \;\; q(v) = \alpha_1 \big(l_1(v)\big)^2 + \cdots + \alpha_n \big(l_n(v)\big)^2.$$

Preuve : Par récurrence sur n.

V. Bases orthogonales

Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base (quelconque !) de E et soit
$v = \sum_{k=1} x_k v_k \in E$.

V. Bases orthogonales

Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base (quelconque !) de E et soit $v = \sum_{k=1} x_k v_k \in E$. On écrit

$$q(v) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, x_k^2 + 2 \sum_{1 \le k < l \le n} a_{k,l} \, x_k x_l .$$

Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base (quelconque !) de E et soit $v = \sum_{k=1} x_k v_k \in E$. On écrit

$$q(v) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, x_k^2 + 2 \sum_{1 \le k < l \le n} a_{k,l}\, x_k x_l.$$

S'il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_k \neq 0$:

V. Bases orthogonales

Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base (quelconque !) de E et soit $v = \sum_{k=1} x_k v_k \in E$. On écrit

$$q(v) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{k,l}\, x_k x_l .$$

S'il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_k \neq 0$: On peut supposer que $a_1 \neq 0$ et on écrit

$$q(v) \quad = \quad a_1 x_1^2 + 2x_1 f\left(x_2, \ldots, x_n\right) + Q\left(x_2, \ldots, x_n\right)$$

V. Bases orthogonales

Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base (quelconque !) de E et soit $v = \sum_{k=1} x_k v_k \in E$. On écrit

$$q(v) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{k,l} \, x_k x_l .$$

S'il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_k \neq 0$: On peut supposer que $a_1 \neq 0$ et on écrit

$$\begin{aligned} q(v) &= a_1 x_1^2 + 2 x_1 f(x_2, \ldots, x_n) + Q(x_2, \ldots, x_n) \\ &= a_1 x_1^2 + 2 x_1 f(w) + Q(w) \end{aligned}$$

V. Bases orthogonales

Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base (quelconque !) de E et soit $v = \sum_{k=1} x_k v_k \in E$. On écrit

$$q(v) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{k,l}\, x_k x_l.$$

S'il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_k \neq 0$: On peut supposer que $a_1 \neq 0$ et on écrit

$$\begin{aligned} q(v) &= a_1 x_1^2 + 2x_1 f\left(x_2, \ldots, x_n\right) + Q\left(x_2, \ldots, x_n\right) \\ &= a_1 x_1^2 + 2x_1 f\left(w\right) + Q\left(w\right) \\ &= a_1 \left[x_1 + \frac{f(w)}{a_1}\right]^2 - \frac{\left(f(w)\right)^2}{a_1} + Q(w) \end{aligned}$$

Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base (quelconque !) de E et soit $v = \sum_{k=1} x_k v_k \in E$. On écrit

$$q(v) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{k,l}\, x_k x_l.$$

S'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_k \neq 0$: On peut supposer que $a_1 \neq 0$ et on écrit

$$\begin{aligned} q(v) &= a_1 x_1^2 + 2 x_1 f\left(x_2, \dots, x_n\right) + Q\left(x_2, \dots, x_n\right) \\ &= a_1 x_1^2 + 2 x_1 f\left(w\right) + Q\left(w\right) \\ &= a_1 \left[x_1 + \frac{f(w)}{a_1}\right]^2 - \frac{\left(f(w)\right)^2}{a_1} + Q(w) \end{aligned}$$

puis on applique l'HR à $-\frac{f^2}{a_1} + Q$.

V. Bases orthogonales

Si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k = 0$:

Si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $a_k = 0$: On suppose que $q \neq 0_{\mathcal{Q}(E)}$

<u>Si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $a_k = 0$:</u> On suppose que $q \neq 0_{\mathcal{Q}(E)}$ et on peut supposer que $a_{1,2} \neq 0$.

V. Bases orthogonales

Si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $a_k = 0$: On suppose que $q \neq 0_{\mathcal{Q}(E)}$ et on peut supposer que $a_{1,2} \neq 0$. On écrit alors

$$q(v) \quad = \quad 2a_{1,2}\, x_1 x_2 + 2x_1 f_1\left(x_3, \dots, x_n\right) + 2x_2 f_2\left(x_3, \dots, x_n\right) + Q\left(x_3, \dots, x_n\right)$$

Si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k = 0$: On suppose que $q \neq 0_{\mathcal{Q}(E)}$ et on peut supposer que $a_{1,2} \neq 0$. On écrit alors

$$\begin{aligned} q(v) &= 2a_{1,2}\, x_1 x_2 + 2x_1 f_1\left(x_3, \ldots, x_n\right) + 2x_2 f_2\left(x_3, \ldots, x_n\right) + Q\left(x_3, \ldots, x_n\right) \\ &= 2a_{1,2}\, x_1 x_2 + 2x_1 f_1\left(w\right) + 2x_2 f_2\left(w\right) + Q\left(w\right) \end{aligned}$$

V. Bases orthogonales

Si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k = 0$: On suppose que $q \neq 0_{\mathcal{Q}(E)}$ et on peut supposer que $a_{1,2} \neq 0$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
q(v) &= 2a_{1,2}\, x_1x_2 + 2x_1 f_1\left(x_3, \ldots, x_n\right) + 2x_2 f_2\left(x_3, \ldots, x_n\right) + Q\left(x_3, \ldots, x_n\right) \\
&= 2a_{1,2}\, x_1x_2 + 2x_1 f_1\left(w\right) + 2x_2 f_2\left(w\right) + Q\left(w\right) \\
&= 2a_{1,2}\left[x_1x_2 + \frac{x_1}{a_{1,2}} f_1\left(w\right) + \frac{x_2}{a_{1,2}} f_2\left(w\right)\right] + Q\left(w\right)
\end{aligned}$$

V. Bases orthogonales

Si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k = 0$: On suppose que $q \neq 0_{\mathcal{Q}(E)}$ et on peut supposer que $a_{1,2} \neq 0$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
q(v) &= 2a_{1,2}\, x_1 x_2 + 2x_1 f_1\left(x_3, \ldots, x_n\right) + 2x_2 f_2\left(x_3, \ldots, x_n\right) + Q\left(x_3, \ldots, x_n\right) \\
&= 2a_{1,2}\, x_1 x_2 + 2x_1 f_1\left(w\right) + 2x_2 f_2\left(w\right) + Q\left(w\right) \\
&= 2a_{1,2}\left[x_1 x_2 + \frac{x_1}{a_{1,2}} f_1\left(w\right) + \frac{x_2}{a_{1,2}} f_2\left(w\right)\right] + Q\left(w\right) \\
&= 2a_{1,2}\left[\left(x_1 + \frac{f_2\left(w\right)}{a_{1,2}}\right)\left(x_2 + \frac{f_1\left(w\right)}{a_{1,2}}\right) - \frac{f_1(w) f_2(w)}{a_{1,2}^2}\right] + Q\left(w\right)
\end{aligned}$$

V. Bases orthogonales

Si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k = 0$: On suppose que $q \neq 0_{\mathcal{Q}(E)}$ et on peut supposer que $a_{1,2} \neq 0$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
q(v) &= 2a_{1,2}\, x_1x_2 + 2x_1 f_1\left(x_3, \ldots, x_n\right) + 2x_2 f_2\left(x_3, \ldots, x_n\right) + Q\left(x_3, \ldots, x_n\right) \\
&= 2a_{1,2}\, x_1x_2 + 2x_1 f_1\left(w\right) + 2x_2 f_2\left(w\right) + Q\left(w\right) \\
&= 2a_{1,2}\left[x_1x_2 + \frac{x_1}{a_{1,2}} f_1\left(w\right) + \frac{x_2}{a_{1,2}} f_2\left(w\right)\right] + Q\left(w\right) \\
&= 2a_{1,2}\left[\left(x_1 + \frac{f_2\left(w\right)}{a_{1,2}}\right)\left(x_2 + \frac{f_1\left(w\right)}{a_{1,2}}\right) - \frac{f_1(w)f_2(w)}{a_{1,2}^2}\right] + Q\left(w\right) \\
&= 2a_{1,2}\left(x_1 + \frac{f_2\left(w\right)}{a_{1,2}}\right)\left(x_2 + \frac{f_1\left(w\right)}{a_{1,2}}\right) - 2\frac{f_1(w)f_2(w)}{a_{1,2}} + Q\left(w\right)
\end{aligned}$$

V. Bases orthogonales

Si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k = 0$: On suppose que $q \neq 0_{\mathcal{Q}(E)}$ et on peut supposer que $a_{1,2} \neq 0$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
q(v) &= 2a_{1,2}\, x_1 x_2 + 2x_1 f_1\left(x_3, \ldots, x_n\right) + 2x_2 f_2\left(x_3, \ldots, x_n\right) + Q\left(x_3, \ldots, x_n\right) \\
&= 2a_{1,2}\, x_1 x_2 + 2x_1 f_1\left(w\right) + 2x_2 f_2\left(w\right) + Q\left(w\right) \\
&= 2a_{1,2}\left[x_1 x_2 + \frac{x_1}{a_{1,2}} f_1\left(w\right) + \frac{x_2}{a_{1,2}} f_2\left(w\right)\right] + Q\left(w\right) \\
&= 2a_{1,2}\left[\left(x_1 + \frac{f_2\left(w\right)}{a_{1,2}}\right)\left(x_2 + \frac{f_1\left(w\right)}{a_{1,2}}\right) - \frac{f_1(w) f_2(w)}{a_{1,2}^2}\right] + Q\left(w\right) \\
&= 2a_{1,2}\left(x_1 + \frac{f_2\left(w\right)}{a_{1,2}}\right)\left(x_2 + \frac{f_1\left(w\right)}{a_{1,2}}\right) - 2\frac{f_1(w) f_2(w)}{a_{1,2}} + Q\left(w\right) \\
&= \frac{a_{1,2}}{2}\left[\left(x_1 + x_2 + \frac{f_1(w) + f_2\left(w\right)}{a_{1,2}}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{f_2\left(w\right) - f_1(w)}{a_{1,2}}\right)^2\right] \\
&\qquad - 2\frac{f_1(w) f_2(w)}{a_{1,2}} + Q\left(w\right),
\end{aligned}$$

Si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k = 0$: On suppose que $q \neq 0_{\mathcal{Q}(E)}$ et on peut supposer que $a_{1,2} \neq 0$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
q(v) &= 2a_{1,2}\, x_1 x_2 + 2x_1 f_1\left(x_3, \ldots, x_n\right) + 2x_2 f_2\left(x_3, \ldots, x_n\right) + Q\left(x_3, \ldots, x_n\right) \\
&= 2a_{1,2}\, x_1 x_2 + 2x_1 f_1\left(w\right) + 2x_2 f_2\left(w\right) + Q\left(w\right) \\
&= 2a_{1,2}\left[x_1 x_2 + \frac{x_1}{a_{1,2}} f_1\left(w\right) + \frac{x_2}{a_{1,2}} f_2\left(w\right)\right] + Q\left(w\right) \\
&= 2a_{1,2}\left[\left(x_1 + \frac{f_2\left(w\right)}{a_{1,2}}\right)\left(x_2 + \frac{f_1\left(w\right)}{a_{1,2}}\right) - \frac{f_1(w) f_2(w)}{a_{1,2}^2}\right] + Q\left(w\right) \\
&= 2a_{1,2}\left(x_1 + \frac{f_2\left(w\right)}{a_{1,2}}\right)\left(x_2 + \frac{f_1\left(w\right)}{a_{1,2}}\right) - 2\frac{f_1(w) f_2(w)}{a_{1,2}} + Q\left(w\right) \\
&= \frac{a_{1,2}}{2}\left[\left(x_1 + x_2 + \frac{f_1(w) + f_2\left(w\right)}{a_{1,2}}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{f_2\left(w\right) - f_1(w)}{a_{1,2}}\right)^2\right] \\
&\qquad - 2\frac{f_1(w) f_2(w)}{a_{1,2}} + Q\left(w\right),
\end{aligned}$$

et on applique l'HR.

Ecrivons donc

$$q = \alpha_1 (l_1)^2 + \cdots + \alpha_n (l_n)^2$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et $l_1, \ldots, l_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ linéairement indépendantes.

Ecrivons donc

$$q = \alpha_1 (l_1)^2 + \cdots + \alpha_n (l_n)^2$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et $l_1, \ldots, l_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ linéairement indépendantes.

2$^{\text{ème}}$ étape : On considère la base "antéduale" $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de la base $\{l_1, \ldots, l_n\}$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$,

Ecrivons donc

$$q = \alpha_1 (l_1)^2 + \cdots + \alpha_n (l_n)^2$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et $l_1, \ldots, l_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ linéairement indépendantes.

2ème étape : On considère la base "antéduale" $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de la base $\{l_1, \ldots, l_n\}$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, et on a :

Ecrivons donc

$$q = \alpha_1 (l_1)^2 + \cdots + \alpha_n (l_n)^2$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et $l_1, \dots, l_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ linéairement indépendantes.

2ème étape : On considère la base "antéduale" $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de la base $\{l_1, \dots, l_n\}$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, et on a :

Théorème 22

$\mathcal{B}$ est une base orthogonale de E relativ. à φ

Ecrivons donc

$$q = \alpha_1 (l_1)^2 + \cdots + \alpha_n (l_n)^2$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et $l_1, \ldots, l_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ linéairement indépendantes.

2ème étape : On considère la base "antéduale" $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de la base $\{l_1, \ldots, l_n\}$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, et on a :

Théorème 22

$\mathcal{B}$ est une base orthogonale de E relativ. à φ telle que $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $q(e_k) = \alpha_k$,

Ecrivons donc

$$q = \alpha_1 (l_1)^2 + \cdots + \alpha_n (l_n)^2$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et $l_1, \ldots, l_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ linéairement indépendantes.

<u>2ème étape :</u> On considère la base "antéduale" $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de la base $\{l_1, \ldots, l_n\}$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, et on a :

Théorème 22

$\mathcal{B}$ est une base orthogonale de E relativ. à φ telle que $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $q(e_k) = \alpha_k$, et ainsi

$$\mathrm{Mat}^{\mathrm{fb}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

VI. Signature d'une forme quadratique réelle

VI. Signature d'une forme quadratique réelle

On suppose que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

VI. Signature d'une forme quadratique réelle

On suppose que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$.

On suppose que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$.

Définition 23

On dit que φ (ou q) est <u>positive</u>, resp. <u>négative</u>, si $\forall v \in E$, $q(v) \geq 0$, resp. $q(v) \leq 0$.

On suppose que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$.

Définition 23

On dit que φ (ou q) est positive, resp. négative, si $\forall v \in E$, $q(v) \geq 0$, resp. $q(v) \leq 0$.

Proposition 24

φ est définie ssi φ est non dégénérée et φ est positive ou négative.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E orthogonale relativ. à φ.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E orthogonale relativ. à φ. On note

VI. Signature d'une forme quadratique réelle

Soit $\mathcal{B}$ une base de E orthogonale relativ. à φ. On note

- r le nombre de coef. > 0 de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$,

VI. Signature d'une forme quadratique réelle

Soit $\mathcal{B}$ une base de E orthogonale relativ. à φ. On note

- r le nombre de coef. > 0 de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$,
- s le nombre de coef. < 0 de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$.

VI. Signature d'une forme quadratique réelle

Soit $\mathcal{B}$ une base de E orthogonale relativ. à φ. On note

- r le nombre de coef. > 0 de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$,
- s le nombre de coef. < 0 de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$.

On a $r + s = \mathrm{rg}_{\varphi}$ et

VI. Signature d'une forme quadratique réelle

Soit $\mathcal{B}$ une base de E orthogonale relativ. à φ. On note

- r le nombre de coef. > 0 de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$,
- s le nombre de coef. < 0 de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$.

On a $r + s = \mathrm{rg}_{\varphi}$ et

Théorème 25

Les nombres r et s sont indépendants de $\mathcal{B}$,

VI. Signature d'une forme quadratique réelle

Soit $\mathcal{B}$ une base de E orthogonale relativ. à φ. On note

- r le nombre de coef. > 0 de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$,
- s le nombre de coef. < 0 de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$.

On a $r + s = \mathrm{rg}_{\varphi}$ et

Théorème 25

Les nombres r et s sont indépendants de $\mathcal{B}$, et le couple (r, s) est appelé la signature de φ (ou de q).

VI. Signature d'une forme quadratique réelle

Soit $\mathcal{B}$ une base de E orthogonale relativ. à φ. On note

- r le nombre de coef. > 0 de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$,
- s le nombre de coef. < 0 de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$.

On a $r + s = \mathrm{rg}_{\varphi}$ et

Théorème 25

Les nombres r et s sont indépendants de $\mathcal{B}$, et le couple (r, s) est appelé la signature de φ (ou de q).

Proposition 26

φ est

- est positive ssi $s = 0$,

VI. Signature d'une forme quadratique réelle

Soit $\mathcal{B}$ une base de E orthogonale relativ. à φ. On note

- r le nombre de coef. > 0 de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$,
- s le nombre de coef. < 0 de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{fb}}(\varphi)$.

On a $r + s = \mathrm{rg}_{\varphi}$ et

Théorème 25

Les nombres r et s sont indépendants de $\mathcal{B}$, et le couple (r, s) est appelé la signature de φ (ou de q).

Proposition 26

φ est

- est positive ssi $s = 0$,
- est négative ssi $r = 0$,

VI. Signature d'une forme quadratique réelle

Soit $\mathcal{B}$ une base de E orthogonale relativ. à φ. On note

- r le nombre de coef. > 0 de $\mathrm{Mat}^{\mathrm{fb}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$,
- s le nombre de coef. < 0 de $\mathrm{Mat}^{\mathrm{fb}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

On a $r + s = \mathrm{rg}_{\varphi}$ et

Théorème 25

Les nombres r et s sont indépendants de $\mathcal{B}$, et le couple (r, s) est appelé la signature de φ (ou de q).

Proposition 26

φ est

- est positive ssi $s = 0$,
- est négative ssi $r = 0$,
- est non dégénérée si $r + s = n$.