Chapitre 4 : Espaces préhilbertiens

I. Introduction : p.s. et p.s.h. en dimension infinie

On généralise les notions de produit scalaire et de p.s. hermitien aux espaces de dimension infinie.

I. Introduction : p.s. et p.s.h. en dimension infinie

On généralise les notions de produit scalaire et de p.s. hermitien aux espaces de dimension infinie.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit E un $\mathbb{K}$-ev.

I. Introduction : p.s. et p.s.h. en dimension infinie

On généralise les notions de produit scalaire et de p.s. hermitien aux espaces de dimension infinie.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit E un $\mathbb{K}$-ev.

Définition 1

- Si $K = \mathbb{R}$,

I. Introduction : p.s. et p.s.h. en dimension infinie

On généralise les notions de produit scalaire et de p.s. hermitien aux espaces de dimension infinie.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit E un $\mathbb{K}$-ev.

Définition 1

- Si $K = \mathbb{R}$, un <u>produit scalaire sur E</u> est une application $E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique définie positive.

I. Introduction : p.s. et p.s.h. en dimension infinie

On généralise les notions de produit scalaire et de p.s. hermitien aux espaces de dimension infinie.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit E un $\mathbb{K}$-ev.

Définition 1

- Si $K = \mathbb{R}$, un <u>produit scalaire sur E</u> est une application $E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique définie positive.
- Si $K = \mathbb{C}$,

I. Introduction : p.s. et p.s.h. en dimension infinie

On généralise les notions de produit scalaire et de p.s. hermitien aux espaces de dimension infinie.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit E un $\mathbb{K}$-ev.

Définition 1

- Si $K = \mathbb{R}$, un <u>produit scalaire sur E</u> est une application $E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique définie positive.
- Si $K = \mathbb{C}$, un <u>produit scalaire hermitien sur E</u> est une application $E \times E \to \mathbb{C}$ sesquilinéaire symétrique hermitienne définie positive.

I. Introduction : p.s. et p.s.h. en dimension infinie

On généralise les notions de produit scalaire et de p.s. hermitien aux espaces de dimension infinie.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit E un $\mathbb{K}$-ev.

Définition 1

- Si $K = \mathbb{R}$, un <u>produit scalaire sur E</u> est une application $E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique définie positive.
- Si $K = \mathbb{C}$, un <u>produit scalaire hermitien sur E</u> est une application $E \times E \to \mathbb{C}$ sesquilinéaire symétrique hermitienne définie positive.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{K}$.

I. Introduction : p.s. et p.s.h. en dimension infinie

On généralise les notions de produit scalaire et de p.s. hermitien aux espaces de dimension infinie.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit E un $\mathbb{K}$-ev.

Définition 1

- Si $K = \mathbb{R}$, un <u>produit scalaire sur E</u> est une application $E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique définie positive.
- Si $K = \mathbb{C}$, un <u>produit scalaire hermitien sur E</u> est une application $E \times E \to \mathbb{C}$ sesquilinéaire symétrique hermitienne définie positive.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{K}$.

Définition 2

- Si $K = \mathbb{R}$ et si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un p.s., on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un <u>espace préhilbertien réel</u>.

I. Introduction : p.s. et p.s.h. en dimension infinie

On généralise les notions de produit scalaire et de p.s. hermitien aux espaces de dimension infinie.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit E un $\mathbb{K}$-ev.

Définition 1

- Si $K = \mathbb{R}$, un <u>produit scalaire sur E</u> est une application $E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique définie positive.
- Si $K = \mathbb{C}$, un <u>produit scalaire hermitien sur E</u> est une application $E \times E \to \mathbb{C}$ sesquilinéaire symétrique hermitienne définie positive.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{K}$.

Définition 2

- Si $K = \mathbb{R}$ et si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un p.s., on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un <u>espace préhilbertien réel</u>.
- Si $K = \mathbb{C}$ et si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un p.s.h, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un <u>espace préhilbertien complexe</u>.

Exemples 3

Exemples 3

- Tout espace euclidien est un espace préhilbertien réel.

Exemples 3

- Tout espace euclidien est un espace préhilbertien réel.
- Tout espace hermitien est un espace préhilbertien complexe.

I. Introduction : p.s. et p.s.h. en dimension infinie

Exemples 3

- Tout espace euclidien est un espace préhilbertien réel.
- Tout espace hermitien est un espace préhilbertien complexe.

On identifie les propriétés des espaces euclidiens et hermitiens qui se généralisent aux espaces préhilbertiens,

Exemples 3

- Tout espace euclidien est un espace préhilbertien réel.
- Tout espace hermitien est un espace préhilbertien complexe.

On identifie les propriétés des espaces euclidiens et hermitiens qui se généralisent aux espaces préhilbertiens, et celles qui ne se généralisent pas.

II. Inégalité de Cauchy-Schwarz et identités

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien

II. Inégalité de Cauchy-Schwarz et identités

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et soient $v, w \in E$.

II. Inégalité de Cauchy-Schwarz et identités

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et soient $v, w \in E$. On note $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

II. Inégalité de Cauchy-Schwarz et identités

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et soient $v, w \in E$. On note $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Lemme 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

II. Inégalité de Cauchy-Schwarz et identités

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et soient $v, w \in E$. On note $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Lemme 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

On a

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|,$$

II. Inégalité de Cauchy-Schwarz et identités

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et soient $v, w \in E$. On note $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Lemme 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

On a

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|,$$

et $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ ssi la famille $\{v, w\}$ est liée.

II. Inégalité de Cauchy-Schwarz et identités

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et soient $v, w \in E$. On note $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Lemme 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

On a

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|,$$

et $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ ssi la famille $\{v, w\}$ est liée.

<u>Conséquence :</u> Le couple $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé.

II. Inégalité de Cauchy-Schwarz et identités

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et soient $v, w \in E$. On note $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Lemme 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

On a

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|,$$

et $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ ssi la famille $\{v, w\}$ est liée.

<u>Conséquence :</u> Le couple $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé.

Lemme 5 (Identités de polarisation)

II. Inégalité de Cauchy-Schwarz et identités

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et soient $v, w \in E$. On note $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Lemme 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

On a

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|,$$

et $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ ssi la famille $\{v, w\}$ est liée.

<u>Conséquence :</u> Le couple $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé.

Lemme 5 (Identités de polarisation)

- Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel,

II. Inégalité de Cauchy-Schwarz et identités

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et soient $v, w \in E$. On note $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Lemme 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

On a

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|,$$

et $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ ssi la famille $\{v, w\}$ est liée.

<u>Conséquence :</u> Le couple $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé.

Lemme 5 (Identités de polarisation)

- Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel,

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} \left(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right),$$

II. Inégalité de Cauchy-Schwarz et identités

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et soient $v, w \in E$. On note $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Lemme 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

On a

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|,$$

et $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ ssi la famille $\{v, w\}$ est liée.

<u>Conséquence :</u> Le couple $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé.

Lemme 5 (Identités de polarisation)

- Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel,

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} \left(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right),$$

- Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien complexe,

II. Inégalité de Cauchy-Schwarz et identités

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et soient $v, w \in E$. On note $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Lemme 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

On a

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|,$$

et $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ ssi la famille $\{v, w\}$ est liée.

<u>Conséquence :</u> Le couple $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé.

Lemme 5 (Identités de polarisation)

- Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel,

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} \left(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right),$$

- Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien complexe,

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} \left(\|v + w\|^2 + i\|v + iw\|^2 - (1 + i)\|v\|^2 - (1 + i)\|w\|^2 \right).$$

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Soient $v, w \in E$.

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Soient $v, w \in E$. On dit que v et w sont <u>orthogonaux</u> si $\langle v, w \rangle = 0$.

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Soient $v, w \in E$. On dit que v et w sont <u>orthogonaux</u> si $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemme 6 (Théorème de Pythagore)

Si v et w sont orthogonaux, alors $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Soient $v, w \in E$. On dit que v et w sont <u>orthogonaux</u> si $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemme 6 (Théorème de Pythagore)

Si v et w sont orthogonaux, alors $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$. Si E est un espace préhilbertien réel, la réciproque est vraie.

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Soient $v, w \in E$. On dit que v et w sont <u>orthogonaux</u> si $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemme 6 (Théorème de Pythagore)

Si v et w sont orthogonaux, alors $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$. Si E est un espace préhilbertien réel, la réciproque est vraie.

Définition 7

Une famille $\{v_i, i \in I\}$ de vecteurs de $E \setminus \{0_E\}$ est dite

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Soient $v, w \in E$. On dit que v et w sont <u>orthogonaux</u> si $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemme 6 (Théorème de Pythagore)

Si v et w sont orthogonaux, alors $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$. Si E est un espace préhilbertien réel, la réciproque est vraie.

Définition 7

Une famille $\{v_i, i \in I\}$ de vecteurs de $E \setminus \{0_E\}$ est dite

- <u>orthogonale</u> si $\forall i, j \in I$, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$,

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Soient $v, w \in E$. On dit que v et w sont <u>orthogonaux</u> si $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemme 6 (Théorème de Pythagore)

Si v et w sont orthogonaux, alors $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$. Si E est un espace préhilbertien réel, la réciproque est vraie.

Définition 7

Une famille $\{v_i, i \in I\}$ de vecteurs de $E \setminus \{0_E\}$ est dite

- <u>orthogonale</u> si $\forall i, j \in I$, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$,
- <u>orthonormale</u> si $\forall i, j \in I$, $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$.

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Soient $v, w \in E$. On dit que v et w sont orthogonaux si $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemme 6 (Théorème de Pythagore)

Si v et w sont orthogonaux, alors $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$. Si E est un espace préhilbertien réel, la réciproque est vraie.

Définition 7

Une famille $\{v_i, i \in I\}$ de vecteurs de $E \setminus \{0_E\}$ est dite

- orthogonale si $\forall i, j \in I$, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$,
- orthonormale si $\forall i, j \in I$, $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$.

Remarque : Toute sous-famille finie d'une famille orthogonale est libre.

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Un espace préhilbertien de dimension infinie peut <u>ne pas</u> posséder de base orthonormale.

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Un espace préhilbertien de dimension infinie peut ne pas posséder de base orthonormale. Cependant :

Théorème 8

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Un espace préhilbertien de dimension infinie peut ne pas posséder de base orthonormale. Cependant :

Théorème 8

Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille libre et finie de E.

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Un espace préhilbertien de dimension infinie peut ne pas posséder de base orthonormale. Cependant :

Théorème 8

Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille libre et finie de E. Il existe une base orthonormale pour $\mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$.

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Un espace préhilbertien de dimension infinie peut ne pas posséder de base orthonormale. Cependant :

Théorème 8

Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille libre et finie de E. Il existe une base orthonormale pour $\mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$.

Preuve :

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Un espace préhilbertien de dimension infinie peut ne pas posséder de base orthonormale. Cependant :

Théorème 8

Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille libre et finie de E. Il existe une base orthonormale pour $\mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$.

Preuve : on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Si $A \subset E$,

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Si $A \subset E$, on note $A^{\perp}$ le sev $\{v \in E \mid \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$ de E.

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Si $A \subset E$, on note $A^\perp$ le sev $\{v \in E \mid \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$ de E.

On a $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$,

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Si $A \subset E$, on note $A^\perp$ le sev $\{v \in E \mid \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$ de E.

On a $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$, et, si F est un sev de E,

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Si $A \subset E$, on note $A^\perp$ le sev $\{v \in E \mid \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$ de E.

On a $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$, et, si F est un sev de E,

Proposition 9

- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$,

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Si $A \subset E$, on note $A^\perp$ le sev $\{v \in E \mid \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$ de E.

On a $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$, et, si F est un sev de E,

Proposition 9

- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$,
- $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$,

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Si $A \subset E$, on note $A^\perp$ le sev $\{v \in E \mid \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$ de E.

On a $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$, et, si F est un sev de E,

Proposition 9

- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$,
- $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$,
- si F est <u>de dimension finie</u>, $E = F \oplus F^\perp$ et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Si $A \subset E$, on note $A^\perp$ le sev $\{v \in E \mid \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$ de E.

On a $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$, et, si F est un sev de E,

Proposition 9

- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$,
- $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$,
- si F est <u>de dimension finie</u>, $E = F \oplus F^\perp$ et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

<u>Si F est de dimension finie</u>, on note p_F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Si $A \subset E$, on note $A^\perp$ le sev $\{v \in E \mid \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$ de E.

On a $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$, et, si F est un sev de E,

Proposition 9

- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$,
- $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$,
- si F est <u>de dimension finie</u>, $E = F \oplus F^\perp$ et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

<u>Si F est de dimension finie</u>, on note p_F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Proposition 10

Soit $v \in E$.

- si $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est une BON de F, alors $p_F(v) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle v, e_k \rangle \, e_k$,

III. Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Si $A \subset E$, on note $A^\perp$ le sev $\{v \in E \mid \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$ de E.

On a $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$, et, si F est un sev de E,

Proposition 9

- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$,
- $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$,
- si F est <u>de dimension finie</u>, $E = F \oplus F^\perp$ et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

<u>Si F est de dimension finie</u>, on note p_F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Proposition 10

Soit $v \in E$.

- si $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est une BON de F, alors $p_F(v) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle v, e_k \rangle \, e_k$,
- $d(v, F) := \displaystyle\inf_{w \in F} \|w - v\| = \|v - p_F(v)\|$.