Chapitre 3 : Espaces hermitiens

I. Introduction : p.s. hermitien et norme hermitienne

On adapte la notion de produit scalaire aux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels pour obtenir des propriétés géométriques analogues.

I. Introduction : p.s. hermitien et norme hermitienne

On adapte la notion de produit scalaire aux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels pour obtenir des propriétés géométriques analogues.
Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{C}$.

I. Introduction : p.s. hermitien et norme hermitienne

On adapte la notion de produit scalaire aux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels pour obtenir des propriétés géométriques analogues.
Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{C}$.

Définition 1

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur E si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

1. sesquilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
   $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v_1, w \rangle + \overline{\mu} \langle v_2, w \rangle$ et
   $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle = \lambda \langle v, w_1 \rangle + \mu \langle v, w_2 \rangle$,

I. Introduction : p.s. hermitien et norme hermitienne

On adapte la notion de produit scalaire aux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels pour obtenir des propriétés géométriques analogues.
Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{C}$.

Définition 1

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un <u>produit scalaire hermitien sur E</u> si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

1. sesquilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
   $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v_1, w \rangle + \overline{\mu} \langle v_2, w \rangle$ et
   $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle = \lambda \langle v, w_1 \rangle + \mu \langle v, w_2 \rangle$,
2. symétrique hermitienne, i.e. $\forall v, w \in E$, $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$,

I. Introduction : p.s. hermitien et norme hermitienne

On adapte la notion de produit scalaire aux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels pour obtenir des propriétés géométriques analogues.
Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{C}$.

Définition 1

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur E si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

1. sesquilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
   $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v_1, w \rangle + \overline{\mu} \langle v_2, w \rangle$ et
   $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle = \lambda \langle v, w_1 \rangle + \mu \langle v, w_2 \rangle$,
2. symétrique hermitienne, i.e. $\forall v, w \in E$, $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$,
3. déf. pos. i.e. $\forall v \in E$, $\langle v, v \rangle \in [0; +\infty[$ et $(\langle v, v \rangle = 0$ ssi $v = 0_E)$.

I. Introduction : p.s. hermitien et norme hermitienne

On adapte la notion de produit scalaire aux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels pour obtenir des propriétés géométriques analogues.
Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{C}$.

Définition 1

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur E si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

1. sesquilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
   $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v_1, w \rangle + \overline{\mu} \langle v_2, w \rangle$ et
   $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle = \lambda \langle v, w_1 \rangle + \mu \langle v, w_2 \rangle$,
2. symétrique hermitienne, i.e. $\forall v, w \in E$, $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$,
3. déf. pos. i.e. $\forall v \in E$, $\langle v, v \rangle \in [0; +\infty[$ et $(\langle v, v \rangle = 0$ ssi $v = 0_E)$.

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$; $((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto \overline{x_1} y_1 + \cdots + \overline{x_n} y_n$
est un p.s.h. sur $\mathbb{C}^n$, appelé produit scalaire hermitien canonique.

I. Introduction : p.s. hermitien et norme hermitienne

On adapte la notion de produit scalaire aux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels pour obtenir des propriétés géométriques analogues.
Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{C}$.

Définition 1

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur E si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

1. sesquilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
   $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v_1, w \rangle + \overline{\mu} \langle v_2, w \rangle$ et
   $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle = \lambda \langle v, w_1 \rangle + \mu \langle v, w_2 \rangle$,
2. symétrique hermitienne, i.e. $\forall v, w \in E$, $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$,
3. déf. pos. i.e. $\forall v \in E$, $\langle v, v \rangle \in [0; +\infty[$ et $(\langle v, v \rangle = 0$ ssi $v = 0_E)$.

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$; $((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto \overline{x_1} y_1 + \cdots + \overline{x_n} y_n$
est un p.s.h. sur $\mathbb{C}^n$, appelé produit scalaire hermitien canonique.

On étudie les $\mathbb{C}$-ev de dim. finie munis d'un p.s.h, appelés espaces hermitiens.

Remarque 3

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \; ; \; \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) \mapsto x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

n'est pas un p.s.h.

Remarque 3

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \ ; \ \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) \mapsto x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

<u>n'est pas</u> un p.s.h.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien.

Remarque 3

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \ ; \ \big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) \mapsto x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

n'est pas un p.s.h.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien. On définit la norme hermitienne $\| \cdot \| : E \to [0, +\infty[\ ; \ v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$ associée :

Remarque 3

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \;;\; ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

n'est pas un p.s.h.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien. On définit la norme hermitienne $\| \cdot \| : E \to [0, +\infty[\;;\; v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$ associée : l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée et $\| \cdot \|$ est une norme sur E.

Remarque 3

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \;;\; ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

n'est pas un p.s.h.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien. On définit la norme hermitienne $\| \cdot \| : E \to [0, +\infty[\;;\; v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$ associée : l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée et $\| \cdot \|$ est une norme sur E.

L'"identité de polarisation" associée est :

I. Introduction : p. s. hermitien et norme hermitienne

Remarque 3

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}\ ;\ \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) \mapsto x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

n'est pas un p.s.h.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien. On définit la norme hermitienne $\| \cdot \| : E \to [0, +\infty[\ ;\ v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$ associée : l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée et $\| \cdot \|$ est une norme sur E.

L'"identité de polarisation" associée est :

Lemme 4

Pour tous $v, w \in E$,

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} \left(\|v + w\|^2 + i \|iv + w\|^2 - (1 + i) \|v\|^2 - (1 + i) \|w\|^2 \right).$$

Soient $v, w \in E$.

II. Orthogonalité dans les espaces hermitiens

Soient $v, w \in E$.

Définition 5

On dit que v et w sont orthogonaux si $\langle v, w \rangle = 0$.

II. Orthogonalité dans les espaces hermitiens

Soient $v, w \in E$.

Définition 5

On dit que v et w sont orthogonaux si $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemme 6 (Théorème de Pythagore)

Si v et w sont orthogonaux, alors $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

II. Orthogonalité dans les espaces hermitiens

Soient $v, w \in E$.

Définition 5

On dit que v et w sont orthogonaux si $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemme 6 (Théorème de Pythagore)

Si v et w sont orthogonaux, alors $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Remarque 7

La réciproque du théorème de Pythagore est fausse !

II. Orthogonalité dans les espaces hermitiens

Soient $v, w \in E$.

Définition 5

On dit que v et w sont orthogonaux si $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemme 6 (Théorème de Pythagore)

Si v et w sont orthogonaux, alors $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Remarque 7

La réciproque du théorème de Pythagore est fausse !

On définit les notions de famille/base orthogonale/orthonormale exactement de la même façon que dans le cadre euclidien

II. Orthogonalité dans les espaces hermitiens

Soient $v, w \in E$.

Définition 5

On dit que v et w sont orthogonaux si $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemme 6 (Théorème de Pythagore)

Si v et w sont orthogonaux, alors $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Remarque 7

La réciproque du théorème de Pythagore est fausse !

On définit les notions de famille/base orthogonale/orthonormale exactement de la même façon que dans le cadre euclidien et on a :

II. Orthogonalité dans les espaces hermitiens

Soient $v, w \in E$.

Définition 5

On dit que v et w sont <u>orthogonaux</u> si $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemme 6 (Théorème de Pythagore)

Si v et w sont orthogonaux, alors $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Remarque 7

La réciproque du théorème de Pythagore est fausse !

On définit les notions de famille/base orthogonale/orthonormale exactement de la même façon que dans le cadre euclidien et on a :

Théorème 8

Il existe toujours une base orthonormale pour $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

II. Orthogonalité dans les espaces hermitiens

Soient $v, w \in E$.

Définition 5

On dit que v et w sont orthogonaux si $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemme 6 (Théorème de Pythagore)

Si v et w sont orthogonaux, alors $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Remarque 7

La réciproque du théorème de Pythagore est fausse !

On définit les notions de famille/base orthogonale/orthonormale exactement de la même façon que dans le cadre euclidien et on a :

Théorème 8

Il existe toujours une base orthonormale pour $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Preuve : On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Si A est un sous-ensemble de E,

II. Orthogonalité dans les espaces hermitiens

Si A est un sous-ensemble de E, l'orthogonal de A est le sev

$$A^{\perp} := \{v \in E \mid \ \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$$

de E,

II. Orthogonalité dans les espaces hermitiens

Si A est un sous-ensemble de E, l'orthogonal de A est le sev

$$A^{\perp} := \{v \in E \mid \ \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$$

de E, et si F est un sev de E,

Si A est un sous-ensemble de E, l'orthogonal de A est le sev

$$A^{\perp} := \{v \in E \mid \ \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$$

de E, et si F est un sev de E,

Proposition 9

1. $E = F \oplus F^{\perp}$,

Si A est un sous-ensemble de E, l'orthogonal de A est le sev

$$A^{\perp} := \{v \in E \mid \ \forall w \in A, \, \langle v, w \rangle = 0\}$$

de E, et si F est un sev de E,

Proposition 9

1. $E = F \oplus F^{\perp}$,
2. $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Si A est un sous-ensemble de E, l'orthogonal de A est le sev

$$A^{\perp} := \{v \in E \mid \ \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$$

de E, et si F est un sev de E,

Proposition 9

1. $E = F \oplus F^{\perp}$,
2. $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

On note p_F la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$,

II. Orthogonalité dans les espaces hermitiens

Si A est un sous-ensemble de E, l'orthogonal de A est le sev

$$A^\perp := \{v \in E \mid \ \forall w \in A,\ \langle v, w\rangle = 0\}$$

de E, et si F est un sev de E,

Proposition 9

1. $E = F \oplus F^\perp$,
2. $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

On note p_F la projection de E sur F parallèlement à $F^\perp$, et si $v \in E$,

Si A est un sous-ensemble de E, l'orthogonal de A est le sev

$$A^{\perp} := \{v \in E \mid \; \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$$

de E, et si F est un sev de E,

Proposition 9

1. $E = F \oplus F^{\perp}$,
2. $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

On note p_F la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$, et si $v \in E$,

Proposition 10

$$d(v, F) := \inf_{w \in F} \|v - w\| = \|v - p_F(v)\| .$$

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$.

III. Représentation matricielle

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

III. Représentation matricielle

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.
On a

$$\langle v, w \rangle = {}^t\overline{X}AY$$

si on note $A := (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$.

III. Représentation matricielle

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.
On a

$$\langle v, w \rangle = {}^t\overline{X}AY$$

si on note $A := (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Définition 11

On appelle <u>matrice représentative du p.s.h. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$</u> et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{psh}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ la matrice A.

III. Représentation matricielle

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.
On a

$$\langle v, w\rangle = {}^t\overline{X}AY$$

si on note $A := (\langle e_i, e_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$.

Définition 11

On appelle matrice représentative du p.s.h. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathrm{Mat}^{\mathrm{psh}}_{\mathcal{B}}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ la matrice A.

Remarque 12

- $\mathcal{B}$ est orthonormale par rapport à $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ssi $\mathrm{Mat}^{\mathrm{psh}}_{\mathcal{B}}(\langle\cdot,\cdot\rangle) = I_n$.

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.
On a

$$\langle v, w \rangle = {}^t\overline{X} A Y$$

si on note $A := (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \le i,j \le n}$.

Définition 11

On appelle matrice représentative du p.s.h. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{psh}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ la matrice A.

Remarque 12

- $\mathcal{B}$ est orthonormale par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{psh}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = I_n$.
- La matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{psh}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ est hermitienne i.e. ${}^t\overline{A} = A$.

III. Représentation matricielle

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.
On a

$$\langle v, w \rangle = {}^t\overline{X} A Y$$

si on note $A := (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Définition 11

On appelle matrice représentative du p.s.h. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{psh}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ la matrice A.

Remarque 12

- $\mathcal{B}$ est orthonormale par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{psh}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = I_n$.
- La matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{psh}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ est hermitienne i.e. ${}^t\overline{A} = A$.
- Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E,

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.
On a

$$\langle v, w \rangle = {}^t\overline{X} A Y$$

si on note $A := (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Définition 11

On appelle matrice représentative du p.s.h. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathrm{Mat}^{\mathrm{psh}}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ la matrice A.

Remarque 12

- $\mathcal{B}$ est orthonormale par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ssi $\mathrm{Mat}^{\mathrm{psh}}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = I_n$.
- La matrice $A = \mathrm{Mat}^{\mathrm{psh}}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ est hermitienne i.e. ${}^t\overline{A} = A$.
- Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E,

$$\mathrm{Mat}^{\mathrm{psh}}_{\mathcal{B}'}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = {}^t\overline{P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}}\, \mathrm{Mat}^{\mathrm{psh}}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)\, P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}.$$

Soit f un endomorphisme de E.

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 13

On dit que f est un endomorphisme unitaire si

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 13

On dit que f est un endomorphisme unitaire si

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

f est unitaire

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 13

On dit que f est un endomorphisme unitaire si

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

f est unitaire

- ssi $\forall v \in E$, $\|f(v)\| = \|v\|$,

IV. Matrices et endomorphismes unitaires

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 13

On dit que f est un endomorphisme unitaire si

$$\forall v, w \in E,\ \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

f est unitaire

- ssi $\forall v \in E$, $\|f(v)\| = \|v\|$,
- ssi f associe à toute base orthonormale de E une base orthonormale de E.

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 13

On dit que f est un endomorphisme unitaire si

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

f est unitaire

- ssi $\forall v \in E$, $\|f(v)\| = \|v\|$,
- ssi f associe à toute base orthonormale de E une base orthonormale de E.

Proposition 14

L'ensemble $\mathcal{U}(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ des endomorphismes unitaires de E est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

Soit $\mathcal{B}$ une base <u>orthonormale</u> de E.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

IV. Matrices et endomorphismes unitaires

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 15

f est unitaire ssi ${}^t\overline{A}A = I_n$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 15

f est unitaire ssi ${}^t\overline{A}A = I_n$ ssi la matrice A est unitaire.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 15

f est unitaire ssi ${}^t\overline{A}A = I_n$ ssi la matrice A est unitaire.

Remarque : Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = {}^t\overline{A}$.

IV. Matrices et endomorphismes unitaires

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 15

f est unitaire ssi ${}^t\overline{A}A = I_n$ ssi la matrice A est unitaire.

Remarque : Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = {}^t\overline{A}$.

Corollaire 16

Si f est unitaire, alors $|\det(f)| = 1$.

IV. Matrices et endomorphismes unitaires

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 15

f est unitaire ssi ${}^t\overline{A}A = I_n$ ssi la matrice A est unitaire.

Remarque : Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = {}^t\overline{A}$.

Corollaire 16

Si f est unitaire, alors $|\det(f)| = 1$.

On note $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \cdot)$ des matrices unitaires de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

IV. Matrices et endomorphismes unitaires

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 15

f est unitaire ssi ${}^t\overline{A}A = I_n$ ssi la matrice A est unitaire.

Remarque : Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = {}^t\overline{A}$.

Corollaire 16

Si f est unitaire, alors $|\det(f)| = 1$.

On note $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \cdot)$ des matrices unitaires de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Théorème 17

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

IV. Matrices et endomorphismes unitaires

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 15

f est unitaire ssi ${}^t\overline{A}A = I_n$ ssi la matrice A est unitaire.

Remarque : Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = {}^t\overline{A}$.

Corollaire 16

Si f est unitaire, alors $|\det(f)| = 1$.

On note $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \cdot)$ des matrices unitaires de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Théorème 17

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Il existe $Q \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ et $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure (à coefficients diagonaux réels strictement positifs) telles que $A = QR$.

V. Endomorphismes et matrices hermitiens

Soit f un endomorphisme de E.

V. Endomorphismes et matrices hermitiens

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 18

On dit que f est un <u>endomorphisme hermitien</u> si

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle .$$

V. Endomorphismes et matrices hermitiens

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 18

On dit que f est un <u>endomorphisme hermitien</u> si

$$\forall v, w \in E,\ \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \,.$$

Soit $\mathcal{B}$ une base <u>orthonormale</u> de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

V. Endomorphismes et matrices hermitiens

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 18

On dit que f est un endomorphisme hermitien si

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle .$$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 19

f est hermitienne ssi A est hermitienne (i.e. ${}^t\overline{A} = A$).

V. Endomorphismes et matrices hermitiens

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 18

On dit que f est un endomorphisme hermitien si

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle .$$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 19

f est hermitienne ssi A est hermitienne (i.e. ${}^t\overline{A} = A$).

Théorème 20

f est hermitien ssi f est diagonalisable dans une base orthonormale et $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}$.

V. Endomorphismes et matrices hermitiens

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 18

On dit que f est un endomorphisme hermitien si

$$\forall v, w \in E, \ \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \, .$$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 19

f est hermitienne ssi A est hermitienne (i.e. ${}^t\overline{A} = A$).

Théorème 20

f est hermitien ssi f est diagonalisable dans une base orthonormale et $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}$.

Conséquence :

V. Endomorphismes et matrices hermitiens

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 18

On dit que f est un <u>endomorphisme hermitien</u> si

$$\forall v, w \in E,\ \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle\,.$$

Soit $\mathcal{B}$ une base <u>orthonormale</u> de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 19

f est hermitienne ssi A est hermitienne (i.e. ${}^t\overline{A} = A$).

Théorème 20

f est hermitien ssi f est diagonalisable dans une base orthonormale et $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}$.

<u>Conséquence :</u> $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne

V. Endomorphismes et matrices hermitiens

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 18

On dit que f est un endomorphisme hermitien si

$$\forall v, w \in E,\ \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle\,.$$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 19

f est hermitienne ssi A est hermitienne (i.e. ${}^t\overline{A} = A$).

Théorème 20

f est hermitien ssi f est diagonalisable dans une base orthonormale et $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}$.

Conséquence : $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne ss'il existe $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que

$$U^{-1}MU = {}^t\overline{U}MU = D.$$

Soit f un endomorphisme de E.

Soit f un endomorphisme de E.

Théorème 21

f est unitaire ssi f est diagonalisable dans une base orthonormale et $\forall\lambda \in \mathrm{Sp}(f), |\lambda| = 1$.