Chapitre 2 : Rappels et compléments sur les espaces euclidiens

I. Introduction

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{R}$.

I. Introduction

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{R}$.

Définition 1

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

1. bilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \mu \langle v_2, w \rangle$ et
   $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle = \lambda \langle v, w_1 \rangle + \mu \langle v, w_2 \rangle$,

I. Introduction

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{R}$.

Définition 1

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

1. bilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \mu \langle v_2, w \rangle$ et
   $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle = \lambda \langle v, w_1 \rangle + \mu \langle v, w_2 \rangle$,
2. symétrique, i.e. $\forall v, w \in E$, $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$,

I. Introduction

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{R}$.

Définition 1

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

1. bilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \mu \langle v_2, w \rangle$ et $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2 \rangle = \lambda \langle v, w_1 \rangle + \mu \langle v, w_2 \rangle$,
2. symétrique, i.e. $\forall v, w \in E$, $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$,
3. définie positive, i.e. $\forall v \in E$, $\langle v, v \rangle \geq 0$ et $(\langle v, v \rangle = 0$ ssi $v = 0_E)$.

I. Introduction

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ une application $E \times E \to \mathbb{R}$.

Définition 1

On dit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est

1. bilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, w\rangle = \lambda\langle v_1, w\rangle + \mu\langle v_2, w\rangle$ et
   $\langle v, \lambda w_1 + \mu w_2\rangle = \lambda\langle v, w_1\rangle + \mu\langle v, w_2\rangle$,
2. symétrique, i.e. $\forall v, w \in E$, $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$,
3. définie positive, i.e. $\forall v \in E$, $\langle v, v\rangle \geq 0$ et $(\langle v, v\rangle = 0$ ssi $v = 0_E)$.

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{can}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$
est un p.s. sur $\mathbb{R}^n$, appelé produit scalaire canonique.

I. Introduction

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ une application $E\times E\to\mathbb{R}$.

Définition 1

On dit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est

1. bilinéaire, i.e. $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\langle\lambda v_1+\mu v_2, w\rangle = \lambda\langle v_1, w\rangle + \mu\langle v_2, w\rangle$ et $\langle v, \lambda w_1+\mu w_2\rangle = \lambda\langle v, w_1\rangle + \mu\langle v, w_2\rangle$,
2. symétrique, i.e. $\forall v, w\in E$, $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$,
3. définie positive, i.e. $\forall v\in E$, $\langle v, v\rangle \geq 0$ et $(\langle v, v\rangle = 0$ ssi $v = 0_E)$.

Exemple 2

Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. L'application
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{can}} : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\ ;\ ((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n))\mapsto x_1y_1+\cdots+x_ny_n$
est un p.s. sur $\mathbb{R}^n$, appelé produit scalaire canonique.

On étudie les $\mathbb{R}$-ev de dimension finie munis d'un p.s., appelés espaces euclidiens.

II. Norme euclidienne

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On note $\| \cdot \|$ l'application $E \to [0, +\infty[\ ;\ v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

II. Norme euclidienne

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On note $\| \cdot \|$ l'application $E \to [0, +\infty[\ ;\ v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Soient $v, w \in E$.

Lemme 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ et $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ ssi v et w sont liés.

II. Norme euclidienne

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. On note $\|\cdot\|$ l'application $E \to [0, +\infty[\ ;\ v \mapsto \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Soient $v, w \in E$.

Lemme 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$ et $|\langle v, w\rangle| = \|v\|\|w\|$ ssi v et w sont liés.

Corollaire 4 (Inégalité triangulaire)

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

II. Norme euclidienne

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On note $\| \cdot \|$ l'application $E \to [0, +\infty[\ ;\ v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Soient $v, w \in E$.

Lemme 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ et $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ ssi v et w sont liés.

Corollaire 4 (Inégalité triangulaire)

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Conséquence

L'application $\| \cdot \|$ est une "norme" sur E, appelée <u>norme euclidienne</u>.

II. Norme euclidienne

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On note $\| \cdot \|$ l'application $E \to [0, +\infty[$; $v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Soient $v, w \in E$.

Lemme 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ et $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ ssi v et w sont liés.

Corollaire 4 (Inégalité triangulaire)

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Conséquence

L'application $\| \cdot \|$ est une “norme” sur E, appelée <u>norme euclidienne</u>.

Remarque

On a $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} \left(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right)$.

III. Orthogonalité

Soient $v, w \in E$.

III. Orthogonalité

Soient $v, w \in E$.

Définition 5

On dit que v et w sont orthogonaux si $\langle v, w \rangle = 0$.

Soient $v, w \in E$.

Définition 5

On dit que v et w sont orthogonaux si $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemme 6 (Théorème de Pythagore)

v et w sont orthogonaux ssi $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Soient $v, w \in E$.

Définition 5

On dit que v et w sont orthogonaux si $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemme 6 (Théorème de Pythagore)

v et w sont orthogonaux ssi $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Remarque 7

Une famille de vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux, appelée famille orthogonale, est libre.

IV. Bases orthogonales, bases orthonormales

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 8

- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$.

IV. Bases orthogonales, bases orthonormales

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 8

- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$.
- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i\,j}$.

IV. Bases orthogonales, bases orthonormales

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 8

- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$.
- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i\,j}$.

Exemple 9

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}}$.

IV. Bases orthogonales, bases orthonormales

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 8

- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$.
- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i\,j}$.

Exemple 9

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}}$.

Remarque 10

1. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale alors, pour tous $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i, w = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$, $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

IV. Bases orthogonales, bases orthonormales

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 8

- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$.
- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i\,j}$.

Exemple 9

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}}$.

Remarque 10

1. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale alors, pour tous $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, w = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$, $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
2. Pour tous $v \in E$, $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i$.

IV. Bases orthogonales, bases orthonormales

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

Définition 8

- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$.
- On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i\,j}$.

Exemple 9

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}}$.

Remarque 10

1. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale alors, pour tous $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i, w = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$, $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
2. Pour tous $v \in E$, $v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$.
3. On peut "normaliser" une base orthogonale en une base orthonormale.

IV. Bases orthogonales, bases orthonormales

Théorème 11

Il existe toujours une base orthonormale pour $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Théorème 11

Il existe toujours une base orthonormale pour $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Preuve : A partir d'une base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de E, on peut construire une base orthonormale à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Théorème 11

Il existe toujours une base orthonormale pour $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Preuve : A partir d'une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de E, on peut construire une base orthonormale à l'aide du
procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Conséquence

Si $\dim(E) = n$, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ peut être "identifié" à $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{can}})$.

V. Orthogonal d'un sous-ensemble/d'un sev

Soit A un sous-ensemble de E.

Soit A un sous-ensemble de E.

Définition 12

On appelle le sev

$$A^\perp := \{v \in E \mid \ \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$$

de E l'orthogonal de A.

V. Orthogonal d'un sous-ensemble/d'un sev

Soit A un sous-ensemble de E.

Définition 12

On appelle le sev

$$A^{\perp} := \{v \in E \mid \ \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$$

de E l'orthogonal de A.

Exemple 13

$\{0_E\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0_E\}$.

V. Orthogonal d'un sous-ensemble/d'un sev

Soit A un sous-ensemble de E.

Définition 12

On appelle le sev

$$A^\perp := \{v \in E \mid \ \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$$

de E l'orthogonal de A.

Exemple 13

$\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

Soit F un sev de E.

V. Orthogonal d'un sous-ensemble/d'un sev

Soit A un sous-ensemble de E.

Définition 12

On appelle le sev

$$A^{\perp} := \{v \in E \mid \ \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$$

de E l'orthogonal de A.

Exemple 13

$\{0_E\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0_E\}$.

Soit F un sev de E.

Proposition 14

1. $E = F \oplus F^{\perp}$.

V. Orthogonal d'un sous-ensemble/d'un sev

Soit A un sous-ensemble de E.

Définition 12

On appelle le sev

$$A^{\perp} := \{v \in E \mid \ \forall w \in A,\ \langle v, w\rangle = 0\}$$

de E l'<u>orthogonal de A</u>.

Exemple 13

$\{0_E\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0_E\}$.

Soit F un sev de E.

Proposition 14

1. $E = F \oplus F^{\perp}$.
2. $\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right)$.

V. Orthogonal d'un sous-ensemble/d'un sev

Soit A un sous-ensemble de E.

Définition 12

On appelle le sev

$$A^{\perp} := \{v \in E \mid \ \forall w \in A, \langle v, w \rangle = 0\}$$

de E l'orthogonal de A.

Exemple 13

$\{0_E\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0_E\}$.

Soit F un sev de E.

Proposition 14

1. $E = F \oplus F^{\perp}$.
2. $\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right)$.
3. $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Définition 15

On appelle projection orthogonale sur F la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$, notée p_F.

V. Orthogonal d'un sous-ensemble/d'un sev

Définition 15

On appelle projection orthogonale sur F la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$, notée p_F.

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$, notée s_F.

Définition 15

On appelle projection orthogonale sur F la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$, notée p_F.

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$, notée s_F.

Soit $v \in E$.

V. Orthogonal d'un sous-ensemble/d'un sev

Définition 15

On appelle <u>projection orthogonale sur F</u> la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$, notée p_F.

On appelle <u>symétrie orthogonale par rapport à F</u> la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$, notée s_F.

Soit $v \in E$.

Proposition 16

$$d(v, F) := \inf_{w \in F} \|v - w\| = \|v - p_F(v)\| .$$

V. Orthogonal d'un sous-ensemble/d'un sev

Définition 15

On appelle projection orthogonale sur F la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$, notée p_F.

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$, notée s_F.

Soit $v \in E$.

Proposition 16

$$d(v, F) := \inf_{w \in F} \|v - w\| = \|v - p_F(v)\| .$$

Remarque 17

Soit $w \in E$. Alors $w = p_F(v)$

V. Orthogonal d'un sous-ensemble/d'un sev

Définition 15

On appelle projection orthogonale sur F la projection de E sur F parallèlement à $F^\perp$, notée p_F.

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$, notée s_F.

Soit $v \in E$.

Proposition 16

$$d(v, F) := \inf_{w \in F} \|v - w\| = \|v - p_F(v)\| .$$

Remarque 17

Soit $w \in E$. Alors $w = p_F(v)$ ssi $v - w \in F^\perp$

V. Orthogonal d'un sous-ensemble/d'un sev

Définition 15

On appelle <u>projection orthogonale sur F</u> la projection de E sur F parallèlement à $F^\perp$, notée p_F.

On appelle <u>symétrie orthogonale par rapport à F</u> la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$, notée s_F.

Soit $v \in E$.

Proposition 16

$$d(v, F) := \inf_{w \in F} \|v - w\| = \|v - p_F(v)\| .$$

Remarque 17

Soit $w \in E$. Alors $w = p_F(v)$ ssi $v - w \in F^\perp$ ssi $d(v, F) = \|v - w\|$.

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$.

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

VI. Représentation matricielle du produit scalaire

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

Définition 18

On appelle matrice représentative du p.s. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right) := \left(\langle e_i, e_j \rangle\right)_{1 \le i,j \le n}$$

VI. Représentation matricielle du produit scalaire

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

Définition 18

On appelle <u>matrice représentative du p.s. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$</u> la matrice

$$\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right) := \left(\langle e_i, e_j \rangle\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Si on note A cette matrice, on a alors $\langle v, w \rangle = {}^tXAY$.

VI. Représentation matricielle du produit scalaire

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

Définition 18

On appelle matrice représentative du p.s. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right) := \left(\langle e_i, e_j \rangle\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Si on note A cette matrice, on a alors $\langle v, w \rangle = {}^tXAY$.

Remarque 19

- $\mathcal{B}$ est orthonormale par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right) = I_n$.

VI. Représentation matricielle du produit scalaire

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

Définition 18

On appelle matrice représentative du p.s. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right) := \left(\langle e_i, e_j \rangle\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Si on note A cette matrice, on a alors $\langle v, w \rangle = {}^tXAY$.

Remarque 19

- $\mathcal{B}$ est orthonormale par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right) = I_n$.
- La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ est symétrique et inversible.

VI. Représentation matricielle du produit scalaire

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base (quelconque) de E et $v, w \in E$. Notons $X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $Y := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$.

Définition 18

On appelle matrice représentative du p.s. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) := (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Si on note A cette matrice, on a alors $\langle v, w \rangle = {}^t XAY$.

Remarque 19

- $\mathcal{B}$ est orthonormale par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = I_n$.
- La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ps}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ est symétrique et inversible.
- Attention à ne pas confondre avec la matrice représentative d'une application linéaire !

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E.

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E.

Proposition 20 (changement de base pour le produit scalaire)

$$\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}'}\left(\langle\cdot,\cdot\rangle\right) = {}^{t}P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\,\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}\left(\langle\cdot,\cdot\rangle\right)P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E.

Proposition 20 (changement de base pour le produit scalaire)

$$\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}'}\left(\langle\cdot,\cdot\rangle\right) = {}^t P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\,\mathrm{Mat}^{\mathrm{ps}}_{\mathcal{B}}\left(\langle\cdot,\cdot\rangle\right) P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

Remarque

Attention à ne pas confondre avec le changement de base pour une application linéaire !

Soit f un endomorphisme de E.

VII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 21

On dit que f est un endomorphisme orthogonal si

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

VII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 21

On dit que f est un endomorphisme orthogonal si

$$\forall v, w \in E,\ \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Exemple : Id_E est un endomorphisme orthogonal.

VII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 21

On dit que f est un endomorphisme orthogonal si

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Exemple : Id_E est un endomorphisme orthogonal.

Proposition 22

f est orthogonal

VII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 21

On dit que f est un endomorphisme orthogonal si

$$\forall v, w \in E,\ \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

Exemple : Id_E est un endomorphisme orthogonal.

Proposition 22

f est orthogonal ssi $\forall v \in E,\ \|f(v)\| = \|v\|$

VII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 21

On dit que f est un endomorphisme orthogonal si

$$\forall v, w \in E,\ \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

Exemple : Id_E est un endomorphisme orthogonal.

Proposition 22

f est orthogonal ssi $\forall v \in E$, $\|f(v)\| = \|v\|$ ssi f est une isométrie.

VII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 21

On dit que f est un endomorphisme orthogonal si

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Exemple : Id_E est un endomorphisme orthogonal.

Proposition 22

f est orthogonal ssi $\forall v \in E$, $\|f(v)\| = \|v\|$ ssi f est une isométrie.

Proposition 23

f est orthogonal

VII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 21

On dit que f est un endomorphisme orthogonal si

$$\forall v, w \in E,\ \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

Exemple : Id_E est un endomorphisme orthogonal.

Proposition 22

f est orthogonal ssi $\forall v \in E$, $\|f(v)\| = \|v\|$ ssi f est une isométrie.

Proposition 23

f est orthogonal ssi f associe à toute base orthonormale de E une base orthonormale de E.

VII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 21

On dit que f est un <u>endomorphisme orthogonal</u> si

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

<u>Exemple :</u> Id_E est un endomorphisme orthogonal.

Proposition 22

f est orthogonal ssi $\forall v \in E$, $\|f(v)\| = \|v\|$ ssi f est une isométrie.

Proposition 23

f est orthogonal ssi f associe à toute base orthonormale de E une base orthonormale de E.

Corollaire 24

Si f est orthogonal alors f est inversible et f^{-1} est également orthogonal.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

VII. Matrices et endomorphismes orthogonaux

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 25

f est orthogonal ssi ${}^tAA = I_n$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 25

f est orthogonal ssi ${}^tAA = I_n$ ssi la matrice A est orthogonale.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 25

f est orthogonal ssi ${}^tAA = I_n$ ssi la matrice A est orthogonale.

Remarque : Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = {}^tA$.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 25

f est orthogonal ssi ${}^tAA = I_n$ ssi la matrice A est orthogonale.

Remarque : Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = {}^tA$.

Corollaire 26

Si f est orthogonal alors $\det(f) = 1$ (f est dit direct) ou $\det(f) = -1$ (f est dit indirect).

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 25

f est orthogonal ssi ${}^tAA = I_n$ ssi la matrice A est orthogonale.

Remarque : Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = {}^tA$.

Corollaire 26

Si f est orthogonal alors $\det(f) = 1$ (f est dit direct) ou $\det(f) = -1$ (f est dit indirect).

Proposition 27

L'ensemble $\mathcal{O}(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ des endomorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

VIII. Décomposition QR des matrices inversibles

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$

VIII. Décomposition QR des matrices inversibles

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (il s'agit d'un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$).

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (il s'agit d'un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$).

Théorème 28

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

VIII. Décomposition *QR* des matrices inversibles

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (il s'agit d'un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$).

Théorème 28

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $A = QR$.

IX. Endomorphismes et matrices symétriques

Soit f un endomorphisme de E.

IX. Endomorphismes et matrices symétriques

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 29

On dit que f est un endomorphisme symétrique si

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle .$$

IX. Endomorphismes et matrices symétriques

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 29

On dit que f est un endomorphisme symétrique si

$$\forall v, w \in E,\ \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle .$$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

IX. Endomorphismes et matrices symétriques

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 29

On dit que f est un endomorphisme symétrique si

$$\forall v, w \in E,\ \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle .$$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 30

f est symétrique ssi ${}^tA = A$.

IX. Endomorphismes et matrices symétriques

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 29

On dit que f est un endomorphisme symétrique si

$$\forall v, w \in E, \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle .$$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 30

f est symétrique ssi ${}^tA = A$.

Théorème 31

Si f est symétrique, alors f est diagonalisable dans une base orthonormale.

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 29

On dit que f est un endomorphisme symétrique si

$$\forall v, w \in E,\ \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \,.$$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 30

f est symétrique ssi ${}^tA = A$.

Théorème 31

Si f est symétrique, alors f est diagonalisable dans une base orthonormale.

Conséquence :

IX. Endomorphismes et matrices symétriques

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 29

On dit que f est un <u>endomorphisme symétrique</u> si

$$\forall v, w \in E,\ \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle\,.$$

Soit $\mathcal{B}$ une base <u>orthonormale</u> de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 30

f est symétrique ssi ${}^tA = A$.

Théorème 31

Si f est symétrique, alors f est diagonalisable dans une base orthonormale.

<u>Conséquence :</u> Si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique i.e. ${}^tM = M$,

IX. Endomorphismes et matrices symétriques

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 29

On dit que f est un endomorphisme symétrique si

$$\forall v, w \in E,\ \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle\,.$$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 30

f est symétrique ssi ${}^tA = A$.

Théorème 31

Si f est symétrique, alors f est diagonalisable dans une base orthonormale.

Conséquence : Si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique i.e. ${}^tM = M$, alors il existe $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que

IX. Endomorphismes et matrices symétriques

Soit f un endomorphisme de E.

Définition 29

On dit que f est un endomorphisme symétrique si

$$\forall v, w \in E, \ \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \, .$$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et soit $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 30

f est symétrique ssi ${}^tA = A$.

Théorème 31

Si f est symétrique, alors f est diagonalisable dans une base orthonormale.

Conséquence : Si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique i.e. ${}^tM = M$, alors il existe $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que

$$O^{-1}MO = {}^tOMO = D.$$

X. Réduction des endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme orthogonal de E.

X. Réduction des endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme orthogonal de E.

<u>Notation :</u> Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

Soit f un endomorphisme orthogonal de E.

Notation : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

Théorème 32

Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle

X. Réduction des endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme orthogonal de E.

Notation : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

Théorème 32

Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \epsilon_r & & & \\ & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & R(\theta_s) \end{pmatrix}$$

X. Réduction des endomorphismes orthogonaux

Soit f un endomorphisme orthogonal de E.

Notation : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

Théorème 32

Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \epsilon_r & & & \\ & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & R(\theta_s) \end{pmatrix}$$

où $r, s \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$, $\epsilon_i \in \{+1; -1\}$, $\forall j \in \{1, \ldots, s\}$, $\theta_j \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Lemme 33

Soit F un sev de E.

X. Réduction des endomorphismes orthogonaux

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 34 :

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

<u>Preuve du théorème 34 :</u> Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$:

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

<u>Preuve du théorème 34 :</u> Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
    1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

<u>Preuve du théorème 34 :</u> Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$,

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

<u>Preuve du théorème 34 :</u> Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par f

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_{\lambda} \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par f
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$: on applique HR.

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par f
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$: on applique HR.
  2. si f ne possède pas de valeur propre réelle :

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par f
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$: on applique HR.
  2. si f ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^{-1}$:

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^\perp\right) \subset F^\perp$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^\perp$ est stable par f
     - $\dim\left(F^\perp\right) = n - 1$: on applique HR.
  2. si f ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^{-1}$: h est symétrique

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

<u>Preuve du théorème 34 :</u> Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par f
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$: on applique HR.
  2. si f ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^{-1}$: h est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$,

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par f
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$: on applique HR.
  2. si f ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^{-1}$: h est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$, soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^\perp$ est stable par f
     - $\dim\left(F^\perp\right) = n - 1$: on applique HR.
  2. si f ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^{-1}$: h est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$, soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$: $F := \mathrm{Vect}\{v, f(v)\}$ est de dimension 2

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^\perp\right) \subset F^\perp$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^\perp$ est stable par f
     - $\dim\left(F^\perp\right) = n - 1$: on applique HR.
  2. si f ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^{-1}$: h est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$, soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$: $F := \mathrm{Vect}\{v, f(v)\}$ est de dimension 2 et est stable par f

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

<u>Preuve du théorème 34 :</u> Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par f
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$: on applique HR.
  2. si f ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^{-1}$: h est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$, soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$: $F := \mathrm{Vect}\{v, f(v)\}$ est de dimension 2 et est stable par f
     - $F^{\perp}$ est stable par f

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par f
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$: on applique HR.
  2. si f ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^{-1}$: h est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$, soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$: $F := \mathrm{Vect}\{v, f(v)\}$ est de dimension 2 et est stable par f
     - $F^{\perp}$ est stable par f et $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 2$:

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par f
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$: on applique HR.
  2. si f ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^{-1}$: h est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$, soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$: $F := \mathrm{Vect}\{v, f(v)\}$ est de dimension 2 et est stable par f
     - $F^{\perp}$ est stable par f et $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 2$: on applique HR.

Lemme 33

Soit F un sev de E. Si $f(F) \subset F$, alors $f\left(F^{\perp}\right) \subset F^{\perp}$.

Preuve du théorème 34 : Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- $n = 1$: OK
- Supposons la propriété vérifiée pour tout entier naturel non nul $< n$.
  1. si f possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$:
     - $|\lambda| = 1$
     - soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, on pose $F := \mathrm{Vect}\{v\}$ et $F^{\perp}$ est stable par f
     - $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 1$: on applique HR.
  2. si f ne possède pas de valeur propre réelle :
     - on pose $h := f + f^{-1}$: h est symétrique
     - soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h)$, soit $v \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$: $F := \mathrm{Vect}\{v, f(v)\}$ est de dimension 2 et est stable par f
     - $F^{\perp}$ est stable par f et $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - 2$: on applique HR.

Remarque 35

Les seules valeurs propres réelles possibles pour un endomorphisme orthogonal sont 1 et -1.