



**THESE H.D.R. / Université de Bretagne-Sud**  
*sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne*  
pour obtenir l'

**HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**  
*Mention : Mathématiques et interactions des mathématiques*  
Ecole doctorale SICMA

présentée par

**Bertrand Patureau Mirand**

Laboratoire de Mathématiques de Bretagne  
Atlantique (UMR 6205 du CNRS)

## **Invariants topologiques quantiques non semi-simples.**

**Thèse soutenue le 7 décembre 2012**  
devant le jury composé de :

**Francis Bonahon**

Professeur, University of Southern California (Los Angeles, USA) / *rapporteur*

**Christian Kassel**

Directeur de recherches (Université de Strasbourg et CNRS) / *rapporteur*

**Christine Lescop**

Directeur de recherches (Université de Grenoble I et CNRS) / *rapporteur*

**Christian Blanchet**

Professeur (Université Paris 7) / *examineur*

**Rinat Kashaev**

Professeur (Université de Genève) / *examineur*

**Gaël Meigniez**

Professeur (Université de Bretagne-Sud) / *examineur*



## Table des matières

Introduction	5
Contexte	5
Chronologie des travaux	6
Contenu du mémoire	9
Chapitre 1. Les catégories tensorielles	11
1. Catégories monoïdales	11
1.1. Définition	11
1.2. Calcul graphique de Penrose	11
1.3. Les représentations d'une bigèbre	12
1.4. Les représentations d'une super-bigèbre	12
2. Catégories pivotales	13
2.1. Définition	13
2.2. Calcul graphique de Penrose	14
2.3. Le foncteur pivotale	15
2.4. Les (super)-algèbres de Hopf pivotales	15
3. Catégories enrubannées	16
3.1. Définition	16
3.2. Calcul graphique de Penrose et foncteur enrubanné	17
3.3. Catégories modulaires	18
3.4. Les (super)-algèbres de Hopf enrubannées	18
4. $G^*$ -graduation	19
Chapitre 2. Traces sur des idéaux et invariants de graphes plongés	21
1. Traces sur des idéaux	21
1.1. Dans les catégories enrubannées	21
1.2. Dans les catégories pivotales	22
1.3. Objets ambidextres	22
2. Invariants de graphes plongés	23
2.1. Graphes spatiaux et catégories enrubannées	23
2.2. Graphes sphériques et catégories pivotales	24
3. Exemples et propriétés	26
3.1. Traces ambidextres et dimensions modifiées	26
3.2. Propriétés algébriques	27
3.3. Propriétés de $F'$	29
3.4. Exemples en théorie des représentations	30
Chapitre 3. Les applications aux groupes quantiques	33
1. $\mathfrak{sl}(2 1)$ et les super algèbres de type I	33
2. $U_q\mathfrak{sl}_2$ aux racines de l'unité	36
3. Les groupes quantiques aux racines de l'unité	39

3.1.	Présentation	39
3.2.	La catégorie des modules de poids	40
3.2.1.	Les modules de poids	40
3.2.2.	Structure pivotale, tressage et graduation	41
3.2.3.	Semi-simplicité et projectif	41
3.2.4.	Trace modifiée	42
Chapitre 4.	Invariants des 3-variétés	43
1.	6j-symboles et sommes d'états sur les triangulations	43
1.1.	6j-symboles modifiés	43
1.1.1.	Définition	43
1.1.2.	Propriétés	45
1.2.	Calculs explicites pour $sl_2$	47
1.3.	Catégories relativement sphériques	49
1.4.	La somme d'états	50
1.5.	Les invariants de 3-variétés	51
1.5.1.	Le théorème d'existence et d'invariance	51
1.5.2.	Un raffinement pour $U_q sl_2$	53
1.5.3.	Les applications aux autres groupes quantiques	54
1.6.	HQFT	54
2.	Invariants par chirurgie	55
2.1.	Premier aperçu pour $U_q^H \mathfrak{sl}(2)$	55
2.2.	Catégories relativement modulaires	58
2.3.	Les invariants $N$ et $N^0$	59
Chapitre 5.	Autres travaux	63
1.	L'application cheveux	63
2.	Invariants quantiques d'entrelacs associés aux super algèbres de Lie $\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}$	63
Bibliographie		67

## Introduction

**Contexte.** Les invariants topologiques quantiques forment une large famille d'invariants d'objets géométriques. Ils ont été découverts après l'apparition en 1984 du polynôme de Jones des entrelacs dans  $S^3$  [32]. Leur découverte est parfois présentée comme accidentelle tant ils correspondent à une rupture avec les invariants topologiques classiques et car leurs relations avec la géométrie sont difficiles à établir.

Ils ont en commun un principe qui forme le cœur des constructions de TQFT (la notion de TQFT - pour Topological Quantum Field Theory - a été motivée par les développements récents de la physique théorique. Cette notion a été introduite par E. Witten et axiomatisée par M. Atiyah). Ce principe est le suivant : on étudie des objets géométriques avec une structure différentielle, qui ont une notion de bord. Il existe deux opérations, l'une est de type union « disjointe » et l'autre est le recollement le long du bord. La structure algébrique correspondant aux classes de difféomorphismes de ces objets munies de ces deux opérations est la notion de catégorie tensorielle (ou catégorie monoïdale, qui est muni d'un produit tensoriel). Ainsi ces objets géométriques forment les morphismes d'une catégorie monoïdale de type cobordisme dans laquelle la composition est définie par le recollement le long du bord et le produit tensoriel est donné par l'union disjointe. De ce point de vue, une TQFT est un foncteur de représentation linéaire : c'est un foncteur monoïdal depuis une catégorie monoïdale de cobordisme vers la catégorie monoïdale des  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

Par un foncteur de type TQFT, « l'objet vide » de la catégorie monoïdale de cobordisme est envoyé sur l'espace vectoriel  $\mathbb{k}$ . Par suite les objets géométriques fermés (i.e. sans bords) sont eux envoyés sur les endomorphismes de  $\mathbb{k}$  qui s'identifient avec  $\mathbb{k}$ . Ainsi toute TQFT contient une fonction à valeurs dans  $\mathbb{k}$  sur l'ensemble des objets géométriques fermés et réciproquement, il existe une construction universelle pour reconstruire, à partir d'un tel invariant, une TQFT.

Une fois mise en place une bonne notion de dualité, viennent naturellement dans les catégories réceptacles des TQFT, les notions de trace et de dimension catégorique. D'un point de vue fonctoriel, les objets fermés peuvent souvent être interprétés comme les traces catégoriques d'objets à bord. Dans de nombreuses situations, et en particulier lorsque la catégorie linéaire n'est pas semi-simple, de nombreux morphismes ne sont plus détectés par la trace catégorique et ces morphismes sont qualifiés de négligeables. Ainsi ces représentations de type TQFT sont dépréciées car les invariants d'objets fermés associés contiennent peu d'information.

L'étude systématique des fonctions poids sur les diagrammes de Feynman durant ma thèse de doctorant m'a permis de mesurer que ces représentations non semi-simples peuvent pourtant contenir une information cachée, et complémentaire, sur ces catégories de cobordismes. Pour récupérer cette information il est possible de remplacer la trace catégorique dégénérée par des *traces modifiées* définies partiellement sur les catégories linéaires non semi-simples. La découverte inattendue de ces traces modifiées a guidé mes travaux depuis 2005. Leur existence est révélée par la présence, dans la catégorie linéaire non semi-simple, d'objets particuliers appelés *ambidextres*. En plus de fournir de nouveaux invariants topologiques, elles constituent un nouvel outil en théorie des représentations.

Les invariants de la topologie quantique ont été très largement étudiés ces vingt cinq dernières années. Cependant la plupart des constructions de la topologie quantique reposent sur des catégories semi-simples ou des algèbres de dimension finie. On peut résumer mon travail de recherche de ces dernières années comme une contribution à l'élaboration d'une théorie topologique quantique non semi-simple parallèle à la théorie topologique quantique semi-simple. C'est la raison du titre de ce mémoire.

**Chronologie des travaux.** Le premier exemple intéressant de catégorie monoïdale non semi-simple que j'ai étudié est celui des représentations de la quantification des super algèbres de Lie  $\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}$  (voir l'article [55]). Cette famille de super algèbres de Lie est introduite par V.G. Kac (cf [36]) dans sa classification des super algèbres de Lie simple. P. Vogel ([68]) utilise  $\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}$  pour montrer que tous les invariants de type fini des entrelacs ne proviennent pas des algèbres de Lie semi-simples.

Il existe deux approches pour calculer des invariants quantiques d'entrelacs dans  $S^3$  associés à une super algèbre de Lie. La première passe par l'utilisation de l'intégrale de Kontsevich-Drinfeld, l'autre par les quantifications à la Drinfeld-Jimbo. Dans les deux cas, des invariants numériques sont obtenus par le biais d'une représentation soit de la super algèbre de Lie, soit de sa quantification. Dans l'article [55], nous considérons ces deux méthodes pour la représentation adjointe  $L$  de l'algèbre de Lie et sa déformation quantique  $L_h$ . Nous montrons que la théorie produit un invariant trivial puis expliquons comment le renormaliser en un invariant de graphes noués non trivial. Enfin l'obstruction pour en faire un invariant d'entrelacs est levée et nous obtenons un invariant qui intègre les fonctions de poids considérées par Vogel.

Il était naturel de conjecturer que les deux déformations de  $U\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}$  soient équivalentes (résultat connu pour les algèbres de Lie simple) ce qui implique que les invariants obtenus sont équivalents. Le travail de Nathan Geer durant sa thèse de doctorat permettra peu après de répondre positivement à cette question.

À la suite de sa thèse, Geer est venu passer un séjour en Bretagne durant lequel nous avons découvert l'existence d'une renormalisation de l'invariant de Reshetikhin-Turaev des entrelacs pour la quantification de la super algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2|1)$ . On peut dire que cette découverte a été à la source de notre travail en collaboration durant ces huit dernières années. C'est pourquoi je détaille le processus qui a permis cette découverte.

Notre démarche a été de nous intéresser au cas le plus simple des quantifications des super algèbres de Lie simples : l'algèbre  $U_h\mathfrak{sl}(2|1)$ . Nous avons fait quelques calculs pour une famille  $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1\}}$  de modules simples. Le calcul de Penrose permet d'associer un scalaire  $S'(U, V) \in \mathbb{C}[[\hbar]]$  à l'entrelacs de Hopf long colorié par des modules simples  $U$  et  $V$  :

$$S'(U, V) = \left\langle \begin{array}{c} \bigcirc \\ \downarrow V \end{array} \right\rangle \in \mathbb{C}[[\hbar]].$$

Ces scalaires sont « symétrisables » car reliés aux coefficients de la  $S$ -matrice symétrique (qui joue un rôle important dans les catégories modulaires) par la relation :

$$\text{qdim}(V)S'(U, V) = \text{qdim}(U)S'(V, U) = S(U, V) \tag{1}$$

Pour les modules  $V_\alpha$  dont la dimension quantique  $\text{qdim}(V_\alpha) = 0$  est nulle les coefficients correspondants de la  $S$ -matrice sont nuls. Ce n'est pas le cas pour les valeurs de  $S'$  et un calcul explicite nous donna :

$$S'(V_\alpha, V_\beta) = 4 \sinh(\beta h) \sinh((\beta + 1)h) e^{-(2\alpha+1)(-2\beta+1)h}$$

Miraculeusement, l'expression de  $S'$  reste symétrisable : la dimension quantique nulle se trouve avoir un remplaçant inattendu que l'on note  $d$  :

$$d(V_\beta) = (4 \sinh(\beta h) \sinh((\beta + 1)h))^{-1} \implies d(V_\beta)S'(V_\alpha, V_\beta) = d(V_\alpha)S'(V_\beta, V_\alpha) \neq 0$$

Nous avons ainsi découvert l'existence des dimensions modifiées et les développements qui en ont découlé nourrissent encore aujourd'hui mon travail de recherche.

Les résultats pour  $\mathfrak{sl}(2|1)$  sont publiés dans [22] et dans [23], on les généralise aux super algèbres de type I. Il est à noter que Links, Gould, De Wit et [45, 69], avaient déjà construit des invariants

d'entrelacs basés sur une représentation des quantifications de  $\mathfrak{sl}(2|1)$  et de  $\mathfrak{sl}(m|n)$ . Notre contribution ici a permis de considérer la catégorie des représentations dans son ensemble. En conséquence nous décrivons des invariants notés  $F'$  de graphes coloriés, et, pour les entrelacs, une version multivariées des invariants de Links-Gould. Nous précisons dans [24] les relations entre ces invariants multivariés, le polynôme de HOMFLY-PT colorié, les invariants de Links-Gould, le polynôme multivarié d'Alexander-Conway et l'invariant de Kashaev-Murakami-Murakami des entrelacs dans  $S^3$ .

Après avoir observé les techniques de renormalisation de [22, 23], Vladimir Turaev nous a proposé une collaboration pour généraliser ces méthodes au cadre des catégories enrubannées. Dans [28] nous décrivons une théorie générale d'invariants quantiques renormalisés provenant des catégories enrubannées. C'est dans cet article que la terminologie d'un *objet ambidextre* apparaît pour la première fois. Cette notion donne une explication à l'existence de la dimension modifiée. C'est aussi la première application de cette théorie à un groupe quantique à une racine de l'unité.

Il semblait difficile de comprendre pour quelles raisons un objet simple d'une catégorie est ou n'est pas ambidextre. Pour la quantification des super algèbres de Lie de type I, notre premier élan a été de penser que cette propriété était la déformation quantique d'une propriété bien connue de la théorie classique des représentations de la super algèbre de Lie sous-jacente. Ce n'est pas le cas et la notion d'objet ambidextre ne semblait pas avoir d'équivalent connu en théorie des représentations. Nous avons alors décidé d'écrire un article ([25]) à destination des mathématiciens spécialistes du sujet. Le processus de quantification met en parallèle la catégorie des représentations de la super algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et celles de sa déformation  $U_h\mathfrak{g}$ . On montre qu'en prenant la limite classique  $h \rightarrow 0$ , l'invariant  $F'$  révèle l'existence d'une super-trace modifiée définie sur les endomorphismes d'une classe de  $\mathfrak{g}$ -modules de poids (en fait, les  $\mathfrak{g}$ -modules projectifs). En parallèle, cette construction produit une forme bilinéaire invariante super-symétrique sur un idéal de l'algèbre des tenseurs invariants  $(\bigoplus_n \mathfrak{g}^{\otimes n})^{\mathfrak{g}}$ .

Jonathan Kujawa s'est intéressé à ce travail et nous a proposé d'approfondir et d'illustrer les techniques en jeu par de nombreux exemples de théorie des représentations (les représentations des super algèbres de Lie complexes, mais aussi les représentations d'un groupe fini en caractéristique non première avec l'ordre du groupe et celle des algèbres de Lie en caractéristique  $p \neq 0$ ). Dans l'article [20], nous introduisons la notion de *trace sur un idéal* dans une catégorie enrubannée  $\mathcal{C}$  et la notion de *trace ambidextre* généralisant la notion d'objet ambidextre. Enfin, lors de cette première collaboration avec Geer et Kujawa, nous affinons notre compréhension de la notion d'objet ambidextre : Pour des catégories de représentations bien connues, nous sommes en mesure de décrire quels sont les modules ayant cette propriété. En particulier, nous rencontrons les premiers exemples d'objets simples non ambidextres.

L'invariant défini dans [28] prend sur les graphes tétraédraux (le graphe formé par le 1-squelette du tétraèdre) des valeurs qui sont des analogues des 6j-symboles dans les catégories modulaires. Turaev et Viro utilisent les 6j-symboles pour construire des invariants de 3-variétés obtenus comme somme d'état sur une triangulation. Lors d'une deuxième collaboration avec Geer et Turaev ([29]), nous avons étudié puis utilisé ces 6j-symboles modifiés pour définir un invariant de 3-variétés « à la Turaev-Viro ». L'invariant n'est défini qu'en la présence d'un entrelacs dans la 3-variété et il dépend de la donnée d'une classe de cohomologie de  $H^1(M, G)$  ( $G$  est un groupe commutatif). La donnée algébrique est ici une catégorie pivotale  $G$ -graduée satisfaisant certaines propriétés.

Des formules explicites pour les 6j-symboles sont en général très difficiles à obtenir. Il n'en existe guère dans la littérature que pour des représentations de l'algèbre de Lie classique  $\mathfrak{sl}_2$  (cf par ex. [7]) et pour les représentations de poids entiers de  $U_q\mathfrak{sl}_2$  ([43, 49]). Dans [26], nous mettons à profit la naturalité des invariants modifiés pour développer un calcul « skein » conduisant à de telles formules pour les représentations nilpotentes de  $U_q\mathfrak{sl}_2$  où  $q$  est une racine  $4n+2^{\text{ème}}$  de l'unité. Costantino et Murakami ([12]) ont par la suite donné d'autres formules pour ces 6j-symboles et ont montré que leur croissance quand  $n$  tend vers l'infini est déterminé par le volume hyperbolique de tétraèdres tronqués. Nous montrons que ces 6j-symboles peuvent être codés par des familles de polynômes de Laurent à trois variables et à coefficients dans  $\mathbb{Z}[q]$  dont nous donnons des formules explicites.

L'exemple moteur pour les 6j-symboles modifiés, et sans doute le plus important pour la topologie, a été la catégorie des représentations des groupes quantiques (non réduits) aux racines de l'unité. Ces représentations sont décrites par De Concini, Kac, Procesi, Reshetikhin et Rosso ([14, 15, 16, 17]). Les catégories associées ne sont pas enrubannées (les produits tensoriels de module  $U \otimes V$  et  $V \otimes U$  ne sont généralement même pas isomorphes) mais seulement pivotales (ou souveraines). Justement Alexis Virelizier nous avait suggéré la bonne généralisation de la notion d'objet ambidextre dans une catégorie pivotale. Nous avons donc collaboré avec lui et avons défini dans [30] une généralisation de la théorie des traces sur les idéaux pour les catégories pivotales. Le rapport entre catégorie enrubannée et catégorie pivotale est similaire à celui existant entre anneau commutatif et anneau non commutatif. En particulier, on distingue les notions d'idéal à droite, à gauche ou bilatère. De même apparaissent les notions d'objets ambidextres à droite ou à gauche et de trace à droite ou à gauche. Sous des hypothèses raisonnables, l'ensemble des projectifs forme l'idéal bilatère minimal. Si l'un des projectifs est ambidextre à droite (par ex.), alors il existe deux uniques traces, l'une à droite et l'autre à gauche, duales en un certain sens, sur l'idéal des objets projectifs. Pour construire un invariant  $F'$  de graphes dans  $S^2$  il faut que ces deux traces soit égales. On décrit l'obstruction comme une fonction sur les objets (le « slope ») et on en donne quelques caractéristiques. Ces résultats sont utilisés dans [27].

L'article [27] reprend la construction de [29] et l'élargie au cas d'un groupe  $G$  non commutatif. La donnée algébrique est alors appelée une *catégorie relativement  $G$ -sphérique*. Pour une telle catégorie, il existe une trace sur l'idéal des objets projectifs. Nous montrons que les catégories des représentations des groupes quantiques (non réduits) aux racines de l'unité sont relativement  $G$ -sphériques pour un groupe de Lie  $G$  relié au groupe quantique. Les invariants de 3-variétés sont définis de manière analogue à [29]. Ils dépendent non plus d'une classe de cohomologie mais d'une classe d'isomorphisme de  $G$ -fibré plat. Nous donnons aussi la construction d'une sorte de 2+1-TQFT associée à ces invariants. Finalement, nous montrons que les sous-catégories des représentations nilpotentes des groupes quantiques peuvent être modifiées en des catégories enrubannées pour lesquelles la construction de [28] s'applique.

Lors d'une deuxième collaboration avec Geer et Kujawa, inspirés par les idées de [27], nous donnons une nouvelle caractérisation des objets ambidextres (cf [21]). Sous des hypothèses naturelles dans une catégorie de représentations, si  $V$  est un module simple,  $V \otimes V^*$  se décompose en une somme directe de modules indécomposables. Un seul de ces termes  $W$ , contient l'objet unité (pour le produit tensoriel) comme sous-module. Un seul de ces termes  $W'$  a l'objet unité pour quotient. Nous montrons que  $V$  est ambidextre si et seulement si  $W = W'$ . En particulier, si la catégorie contient un objet simple projectif et qu'elle est unimodulaire (cela signifie que le recouvrement projectif de l'objet unité est isomorphe à son dual), alors il existe une unique trace sur



l'idéal formé par les objets projectifs. Cette nouvelle caractérisation nous permet de fournir une multitude d'exemples dans lesquels la théorie s'applique systématiquement : les représentations de dimensions finies d'algèbres de Hopf de dimension finie, de groupes finis en caractéristique  $p > 0$ , de doubles de Drinfeld, des groupes quantiques aux racines de l'unité, des (super)-algèbres de Lie en caractéristique  $p > 0$ , des super algèbres de Lie complexes...

Geer et moi avons amorcé une construction des invariants de variétés triangulés par l'utilisation des ombres des 4-variétés. Nous avons proposé à Francesco Costantino, qui a largement étudié le monde des ombres de Turaev, une collaboration dans cette entreprise. Le résultat est l'article [11] dans lequel nous utilisons finalement l'approche plus accessible par chirurgie sur des entrelacs, pour construire des invariants de dimension 3 « à la Reshetikhin-Turaev ». La donnée algébrique est alors appelée une catégorie *relativement  $G$ -modulaire*. Nous montrons que les catégories enrubannées des représentations nilpotentes des groupes quantiques sont relativement  $G$ -modulaires.

**Contenu du mémoire.** Ce mémoire présente une synthèse des articles [54, 55, 22, 23, 24, 28, 25, 20, 29, 26, 30, 27, 21, 11]. Il est organisé en cinq chapitres.

Le premier chapitre rappelle différentes notions de catégories monoïdales utilisées dans le reste du mémoire. Le calcul graphique des tenseurs abstraits développé par Penrose est le point de vue préféré pour aborder ces catégories.

Dans le deuxième chapitre, on définit et on étudie les traces modifiées sur les idéaux de ces catégories abstraites. Ces traces produisent des invariants topologiques de graphes plongés dans  $S^2$  ou  $S^3$ .

Dans le troisième chapitre, on montre que les groupes quantiques fournissent des exemples concrets de catégories où la théorie du deuxième chapitre s'applique.

Ces outils et ces exemples sont utilisés dans le chapitre 4 pour construire des invariants topologiques en dimension trois.

Dans le dernier chapitre je présente deux articles plus anciens.



## CHAPITRE 1

### Les catégories tensorielles

Dans cette partie, j'introduis les concepts catégoriques principaux utilisés dans ce texte. Les principales références sont les livres de Kassel et Turaev [39, 62]. Chaque catégorie est mise en relation avec une structure d'algèbre et avec un type de calcul graphique. On parle aussi de la complication liée à la considération des variantes « super ».

Sauf mention contraire,  $\mathbb{k}$  désignera un anneau intègre. Notre motivation pour ne pas se restreindre au cas d'un corps est essentiellement d'obtenir des résultats sur les valeurs prises par les invariants topologiques définis par la suite. On notera  $\mathbb{k}^\times$  les éléments inversibles de  $\mathbb{k}$ .

#### 1. Catégories monoïdales

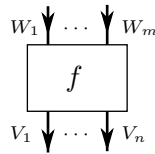
**1.1. Définition.** Par catégories monoïdales nous désignons la notion de catégorie monoïdale stricte (cf Mac Lane [46]). C'est-à-dire que la catégorie  $\mathcal{C}$  est muni d'un bifoncteur appelé le *produit tensoriel*  $\cdot \otimes \cdot : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , et d'un *objet unité*  $\mathbb{I}$  tels que

$$\mathbb{I} \otimes \cdot = \cdot \otimes \mathbb{I} = \text{Id}_{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad (\cdot \otimes \cdot) \otimes \cdot = \cdot \otimes (\cdot \otimes \cdot)$$

On écrit  $V \in \mathcal{C}$  pour désigner un objet  $V$  de la catégorie  $\mathcal{C}$  et on appelle  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$  les morphismes dans  $\mathcal{C}$  de  $V \in \mathcal{C}$  vers  $W \in \mathcal{C}$  et  $\text{End}_{\mathcal{C}}(V) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, V)$ .

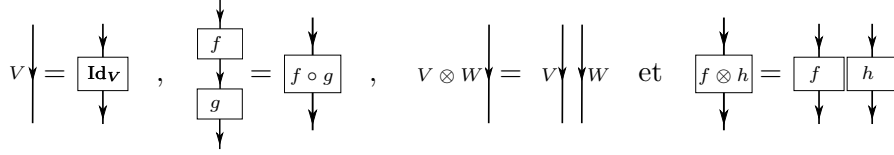
On dit que  $\mathcal{C}$  est une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire monoïdale, si pour tous  $V, W \in \mathcal{C}$ , les morphismes  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$  forment un  $\mathbb{k}$ -module et si la composition et le produit tensoriel sont bilinéaires. Un objet  $V \in \mathcal{C}$  est alors dit *simple* si  $\text{End}_{\mathcal{C}}(V) \cong \mathbb{k}$  comme  $\mathbb{k}$ -algèbre unitaire. Un objet  $W \in \mathcal{C}$  est une somme directe de  $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{C}$  s'il existe pour  $i = 1 \dots n$ ,  $f_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V_i, W)$ ,  $g_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, V_i)$  tels que  $g_i \circ f_i = \text{Id}_{V_i}$ ,  $g_i \circ f_j = 0$  pour  $i \neq j$  et  $\sum_{i=1}^n f_i \circ g_i = \text{Id}_W$ . Un objet  $W \in \mathcal{C}$  est *semi-simple* s'il est une somme directe d'objets simples. La catégorie  $\mathcal{C}$  est *semi-simple* si tous ses objets sont semi-simples et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W) = \{0\}$  pour toute paire d'objets simples de  $\mathcal{C}$  non isomorphes (cette dernière propriété est appelée axiome de Schur dans [62]).

**1.2. Calcul graphique de Penrose.** Le calcul graphique de tenseurs abstraits développé par Penrose ([56]) permet de représenter des morphismes d'une catégorie monoïdale  $\mathcal{C}$  par des diagrammes planaires dessinés dans  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  et appelés *graphes  $\mathcal{C}$ -coloriés*. Ces diagrammes, lus de bas en haut représentent des morphismes de  $\mathcal{C}$ . Ils ont leurs arêtes coloriées par des objets de  $\mathcal{C}$  et leurs sommets internes sont épaissis en des coupons coloriés par des morphismes de  $\mathcal{C}$ . Par exemple un morphisme  $f : V_1 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow W_1 \otimes \dots \otimes W_m$  sera représenté par le coupon



Une arête verticale coloriée par un objet  $V$  représente le morphisme identité de  $V$ . L'empilement et la juxtaposition des graphes  $\mathcal{C}$ -coloriés correspondent respectivement à la composition et au

produit tensoriel des morphismes comme illustré ci-dessous :



ici,  $V$  est un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $f, g, h$  sont des morphismes de  $\mathcal{C}$ ,  $f$  et  $g$  étant composables. Mis à part pour le premier diagramme, les couleurs des arêtes ont été omises mais elles se déduisent de la connaissance de la source et du but des morphismes colorant les coupons. L'absence d'arête au-dessous ou au-dessus d'un coupon signifie que l'objet source ou but du morphisme dans le coupon est l'objet unité  $\mathbb{I}$ .

**1.3. Les représentations d'une bigèbre.** On appelle  $\mathbb{k}$ -bigèbre un quintuplet  $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$  formé d'un  $\mathbb{k}$ -module  $B$  et de quatre applications  $\mathbb{k}$ -linéaires

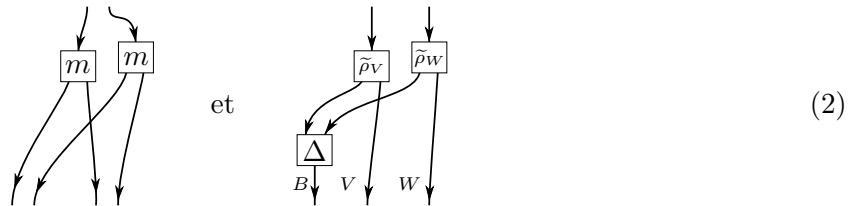
$$m : B \otimes_{\mathbb{k}} B \rightarrow B, \quad \mu : \mathbb{k} \rightarrow B, \quad \Delta : B \rightarrow B \otimes_{\mathbb{k}} B \quad \text{et} \quad \varepsilon : B \rightarrow \mathbb{k}$$

sujettes aux axiomes suivant :

- (1) le produit  $m$  donne une loi de composition interne associative sur  $B$  admettant  $1_B = \mu(1_{\mathbb{k}})$  pour élément neutre. On adopte la notation multiplicative pour cette loi.
- (2) le coproduit  $\Delta$  est coassociatif (i.e.  $(\Delta \otimes_{\mathbb{k}} \text{Id}_B) \circ \Delta = (\text{Id}_B \otimes_{\mathbb{k}} \Delta) \circ \Delta$ ) et admet  $\varepsilon$  pour co-unité (i.e.  $(\varepsilon \otimes_{\mathbb{k}} \text{Id}_B) \circ \Delta = (\text{Id}_B \otimes_{\mathbb{k}} \varepsilon) \circ \Delta = \text{Id}_B$ ).
- (3)  $\Delta$  et  $\varepsilon$  sont des morphismes d'algèbres où l'on a muni  $B \otimes_{\mathbb{k}} B$  du produit associatif donné par  $(m \otimes_{\mathbb{k}} m) \circ (\text{Id}_B \otimes_{\mathbb{k}} \tau \otimes_{\mathbb{k}} \text{Id}_B)$ ,  $\tau$  étant la volte qui échange les deux facteurs du produit tensoriel.

On ne considérera que des  $B$ -modules à gauche c'est-à-dire des  $\mathbb{k}$ -modules  $V$  munis d'un morphisme de  $\mathbb{k}$ -algèbres  $\rho_V : B \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ . Si  $V$  et  $W$  sont des  $B$ -modules, leur produit tensoriel sur  $\mathbb{k}$  est muni de la structure de  $B$ -module donné par  $(\rho_V \otimes_{\mathbb{k}} \rho_W) \circ \Delta$ . Ainsi, la catégorie des  $B$ -modules est une catégorie tensorielle  $\mathbb{k}$ -linéaire avec pour objet unité, le module  $\mathbb{k}$  muni de la représentation de  $B$  donnée par la co-unité.

Il peut être utile de penser la structure de  $B$ -module de  $V \otimes_{\mathbb{k}} W$  comme une action. Alors le produit de  $B \otimes_{\mathbb{k}} B$  et l'action de  $B$  sur  $V \otimes_{\mathbb{k}} W$  peuvent être représentés dans la catégorie monoïdale des  $\mathbb{k}$ -modules par les calculs graphiques :



où les croisements des arêtes représentent les voltes  $\tau \in \text{End}_{\mathbb{k}}(B \otimes_{\mathbb{k}} B)$  (respectivement  $\tau : B \otimes_{\mathbb{k}} V \rightarrow V \otimes_{\mathbb{k}} B$ ) et  $\tilde{\rho} : B \otimes_{\mathbb{k}} X \rightarrow X$  est l'action associée à la représentation  $\rho : B \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(X)$ .

**1.4. Les représentations d'une super-bigèbre.** Soit  $\mathbb{k}$  un anneau commutatif. Un super  $\mathbb{k}$ -module est un  $\mathbb{k}$ -module  $V$  qui est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué :  $V = V_0 \oplus V_1$ . Le produit tensoriel sur  $\mathbb{k}$  de deux super  $\mathbb{k}$ -modules est un super  $\mathbb{k}$ -module  $((V \otimes_{\mathbb{k}} W)_0 = V_0 \otimes_{\mathbb{k}} W_0 \oplus V_1 \otimes_{\mathbb{k}} W_1$  et  $(V \otimes_{\mathbb{k}} W)_1 = V_0 \otimes_{\mathbb{k}} W_1 \oplus V_1 \otimes_{\mathbb{k}} W_0$ ). De manière informelle, Les théories « super » se déduisent des théories classiques en substituant à la volte  $\tau : V \otimes_{\mathbb{k}} W \rightarrow W \otimes_{\mathbb{k}} V$  la super volte  $\tau^s$  définie par blocs pour un produit

tensoriel de super  $\mathbb{k}$ -modules :  $\tau^s|_{V_0 \otimes_{\mathbb{k}} W_0 \oplus (V \otimes_{\mathbb{k}} W)_1} = \tau|_{V_0 \otimes_{\mathbb{k}} W_0 \oplus (V \otimes_{\mathbb{k}} W)_1}$  et  $\tau^s|_{V_1 \otimes_{\mathbb{k}} W_1} = -\tau|_{V_1 \otimes_{\mathbb{k}} W_1}$ . N'importe quel  $\mathbb{k}$ -module sans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation, et en particulier  $\mathbb{k}$  lui-même, peut naturellement être équipé de la graduation pour laquelle la partie impaire est nulle. L'espace des morphismes  $\mathbb{k}$ -linéaires entre super modules est un super  $\mathbb{k}$ -module dont la partie paire est formée des applications qui préservent la  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation et la partie impaire est formée des applications qui renversent la  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation.

Si  $V, W$  sont des  $\mathbb{k}$ -modules, appelons évaluation un morphisme  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \otimes_{\mathbb{k}} V \rightarrow W$  donné par  $f \otimes v \mapsto f(v)$ . Alors on obtient une version super  $S$  du morphisme  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \otimes_{\mathbb{k}} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V', W') \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V \otimes_{\mathbb{k}} V', W \otimes_{\mathbb{k}} W')$  donnée par

$$S(f \otimes f')(v \otimes v') = (\text{ev} \otimes \text{ev}) \circ (\text{Id}_{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)} \otimes \tau^s \otimes \text{Id}_{V'}) (f \otimes f' \otimes v \otimes v')$$

où les deux occurrences de  $\text{ev}$  sont des évaluations. Avec cette définition, le produit tensoriel n'est pas fonctoriel mais il le reste si l'on se restreint aux morphismes pairs. On a donc une catégorie monoïdale  $\mathbb{k}$ -linéaire dont les objets sont des super  $\mathbb{k}$ -modules et les morphismes sont les morphismes  $\mathbb{k}$ -linéaires pairs. On appelle cette catégorie la *catégorie paire* des super  $\mathbb{k}$ -modules.

On appelle super  $\mathbb{k}$ -bigèbre un quintuplet  $(B, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$  formé d'un  $\mathbb{k}$ -module  $B$  et de quatre applications  $\mathbb{k}$ -linéaires paires similairement à la section précédente, qui satisfont (1), (2) et une version de (3) où l'on a remplacé  $\tau$  par  $\tau^s$  dans la définition du produit sur  $B \otimes_{\mathbb{k}} B$ .

Un super  $B$ -module à gauche est un super  $\mathbb{k}$ -module  $V$  muni d'un morphisme de  $\mathbb{k}$ -algèbres pair  $\rho_V : B \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ . Si  $V$  et  $W$  sont des super  $B$ -modules, leur produit tensoriel sur  $\mathbb{k}$  est muni de la structure de super  $B$ -module donné par  $S \circ (\rho_V \otimes_{\mathbb{k}} \rho_W) \circ \Delta$ . Ainsi, la catégorie paire (c'est-à-dire toujours en ne considérant que les morphismes pairs) des super  $B$ -modules est une catégorie tensorielle  $\mathbb{k}$ -linéaire avec  $\mathbb{k}$  pour objet unité. Graphiquement, le produit de  $B \otimes_{\mathbb{k}} B$  et l'action de  $B$  sur  $V \otimes_{\mathbb{k}} W$  sont représentés par les mêmes diagrammes (2) mais ceux-ci sont lus dans la catégorie des super  $\mathbb{k}$ -modules dans laquelle un croisement entre arêtes est interprété comme la version super  $\tau^s$  de la volte.

## 2. Catégories pivotales

**2.1. Définition.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie monoïdale et  $A, B \in \mathcal{C}$ . Une dualité (voir [48]) entre  $A$  et  $B$  est la donnée d'une paire de morphismes  $(\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I}, B \otimes A), \beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B, \mathbb{I}))$  tels que

$$(\beta \otimes \text{Id}_A) \circ (\text{Id}_A \otimes \alpha) = \text{Id}_A \quad \text{et} \quad (\text{Id}_B \otimes \beta) \circ (\alpha \otimes \text{Id}_B) = \text{Id}_B$$

Une catégorie *pivotal* (ou *souveraine*) est une catégorie monoïdale stricte  $\mathcal{C}$ , avec objet unité  $\mathbb{I}$ , équipée de la donnée pour chaque objet  $V \in \mathcal{C}$  de son *objet dual*  $V^* \in \mathcal{C}$  et de quatre morphismes

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{ev}}_V : V^* \otimes V &\rightarrow \mathbb{I}, & \overrightarrow{\text{coev}}_V : \mathbb{I} &\rightarrow V \otimes V^*, \\ \overleftarrow{\text{ev}}_V : V \otimes V^* &\rightarrow \mathbb{I}, & \overleftarrow{\text{coev}}_V : \mathbb{I} &\rightarrow V^* \otimes V, \end{aligned}$$

tels que  $(\overrightarrow{\text{ev}}_V, \overrightarrow{\text{coev}}_V)$  et  $(\overleftarrow{\text{ev}}_V, \overleftarrow{\text{coev}}_V)$  sont des dualités qui induisent le même foncteur dualité (voir [3, 48]) et le même isomorphisme naturel  $(V \otimes W)^* \simeq W^* \otimes V^*$ . Ainsi, les duaux à droite et à gauche coïncident dans  $\mathcal{C}$  : pour tout morphisme  $h : V \rightarrow W$ , on a

$$\begin{aligned} h^* &= (\overrightarrow{\text{ev}}_W \otimes \text{Id}_{V^*}) \circ (\text{Id}_{W^*} \otimes h \otimes \text{Id}_{V^*}) \circ (\text{Id}_{W^*} \otimes \overrightarrow{\text{coev}}_V) \\ &= (\text{Id}_{V^*} \otimes \overleftarrow{\text{ev}}_W) \circ (\text{Id}_{V^*} \otimes h \otimes \text{Id}_{W^*}) \circ (\overleftarrow{\text{coev}}_V \otimes \text{Id}_{W^*}) : W^* \rightarrow V^*, \end{aligned} \tag{3}$$

et pour  $V, W \in \mathcal{C}$ , les isomorphismes  $\gamma_{V, W} : W^* \otimes V^* \rightarrow (V \otimes W)^*$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \gamma_{V, W} &= (\overrightarrow{\text{ev}}_W \otimes \text{Id}_{(V \otimes W)^*}) \circ (\text{Id}_{W^*} \otimes \overrightarrow{\text{ev}}_V \otimes \text{Id}_{W \otimes (V \otimes W)^*}) \circ (\text{Id}_{W^* \otimes V^*} \otimes \overrightarrow{\text{coev}}_{V \otimes W}) \\ &= (\text{Id}_{(V \otimes W)^*} \otimes \overleftarrow{\text{ev}}_V) \circ (\text{Id}_{(V \otimes W)^* \otimes V} \otimes \overleftarrow{\text{ev}}_W \otimes \text{Id}_{V^*}) \circ (\overleftarrow{\text{coev}}_{V \otimes W} \otimes \text{Id}_{W^* \otimes V^*}) \end{aligned} \tag{4}$$

La famille d'isomorphisme

$$\phi = \{\phi_V = (\overleftarrow{\text{ev}}_V \otimes \text{Id}_{V^{**}}) \circ (\text{Id}_V \otimes \overrightarrow{\text{coev}}_{V^*}) : V \rightarrow V^{**}\}_{V \in \mathcal{C}} \quad (5)$$

est un isomorphisme monoïdal naturel appelé la *structure pivotale*.

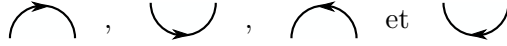
Pour une catégorie pivotale  $\mathbb{k}$ -linéaire, on supposera toujours que  $\mathbb{I}$  est simple. S'il existe, l'objet nul  $N$  de  $\mathcal{C}$  (tel que  $\text{Id}_N = 0$ ) est unique à unique isomorphisme près. Toute catégorie pivotale  $\mathbb{k}$ -linéaire considérée ici sera supposée satisfaire la condition suivante :

$\forall U \in \mathcal{C}$  non nul,  $\forall V, W \in \mathcal{C}$ , l'application

$$\text{Id}_U \otimes ? : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U \otimes V, U \otimes W) \text{ est injective.} \quad (6)$$

Cette condition est équivalente au fait que pour tout  $U \in \mathcal{C}$  non nul,  $\overrightarrow{\text{ev}}_U$  est un épimorphisme (ou encore les propositions équivalentes pour  $? \otimes \text{Id}_U$  et  $\overleftarrow{\text{ev}}_U$ ). Cette hypothèse est évidemment vérifiée pour des catégories dont les objets sont des  $\mathbb{k}$ -modules libres et les morphismes  $\mathbb{k}$ -linéaires.

**2.2. Calcul graphique de Penrose.** Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie pivotale, on enrichit le calcul de Penrose en introduisant des diagrammes dont certaines arêtes sont orientées vers le haut. Une telle arête colorisée par un objet  $V$  de  $\mathcal{C}$  représente le morphisme identité de  $V^*$ . Enfin on représente les morphismes de dualité  $\overrightarrow{\text{ev}}_V$ ,  $\overrightarrow{\text{coev}}_V$ ,  $\overleftarrow{\text{ev}}_V$  et  $\overleftarrow{\text{coev}}_V$  par respectivement :



où les quatre arêtes sont colorisées par  $V$ .

En particulier, le dual  $f^*$  d'un morphisme  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$  est donné par

$$f^* = \begin{array}{c} \downarrow V^* \\ \boxed{f^*} \\ \downarrow W^* \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow V^* \\ \boxed{f} \\ \downarrow W^* \end{array} \begin{array}{c} \uparrow V \\ \uparrow W \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow V^* \\ \boxed{f} \\ \downarrow W^* \end{array} \begin{array}{c} \uparrow V \\ \uparrow W \end{array}$$

Supposons maintenant que  $\mathcal{C}$  soit pivotale  $\mathbb{k}$ -linéaire. Nous utilisons le calcul graphique pour définir les *traces catégoriques à droite et à gauche* : Si  $V \in \mathcal{C}$  et  $f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(V)$ , on pose :

$$\text{tr}_R(f) = \begin{array}{c} \downarrow V^* \\ \boxed{f} \\ \downarrow V^* \end{array} \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I}) = \mathbb{k} \quad \text{et} \quad \text{tr}_L(f) = \begin{array}{c} \downarrow V^* \\ \boxed{f} \\ \downarrow V^* \end{array} \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I}) = \mathbb{k}.$$

De même, si  $V, W \in \mathcal{C}$  et  $f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(V \otimes W)$ , on définit les *traces partielles à droite et à gauche* de  $f$  par

$$\text{ptr}_R(f) = \begin{array}{c} \downarrow V^* \\ \boxed{f} \\ \downarrow V^* \end{array} \in \text{End}_{\mathcal{C}}(V) \quad \text{et} \quad \text{ptr}_L(f) = \begin{array}{c} \downarrow W^* \\ \boxed{f} \\ \downarrow W^* \end{array} \in \text{End}_{\mathcal{C}}(W).$$

Il est facile de vérifier que  $\forall V, W \in \mathcal{C}$ , ces traces satisfont les propriétés suivantes :

$$\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W), \forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, V), \text{tr}_R(f \circ g) = \text{tr}_R(g \circ f) \quad \text{et} \quad \text{tr}_L(f \circ g) = \text{tr}_L(g \circ f) \quad (7)$$

$$\forall f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(V \otimes W), \text{tr}_R(\text{ptr}_R(f)) = \text{tr}_R(f) \quad \text{et} \quad \text{tr}_L(\text{ptr}_L(f)) = \text{tr}_L(f) \quad (8)$$

En revanche, les traces à droite et à gauche ne coïncident généralement pas. Si c'est le cas, la catégorie  $\mathcal{C}$  est dite *sphérique* (cf [3]). Dans ce cas, on note simplement la trace par  $\text{tr} = \text{tr}_L = \text{tr}_R$ .

Ces définitions généralisent la notion habituelle de trace : L'exemple élémentaire de catégorie pivotale (et même sphérique) est donné par la catégorie  $\mathcal{V}ect$  des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps  $\mathbb{k}$  avec le produit tensoriel et la dualité usuelle. L'objet unité est alors l'espace vectoriel unidimensionnel  $\mathbb{k}$ . Si  $V \in \mathcal{V}ect$ , les applications  $\overrightarrow{\text{ev}}_V$  et  $\overleftarrow{\text{ev}}_V$  sont donnés par les évaluations  $f \otimes v \mapsto f(v)$  et  $v \otimes f \mapsto f(v)$ , respectivement. l'application  $\overrightarrow{\text{coev}}_V$  (resp.  $\overleftarrow{\text{coev}}_V$ ) est donné par

$1 \mapsto \sum_i v_i \otimes v_i^*$  (resp.  $1 \mapsto \sum_i v_i^* \otimes v_i$ ) où  $(v_i)$  est une base de  $V$  de base duale  $(v_i^*)$  dans  $V^*$ . Pour toute application linéaire  $f : V \rightarrow V$ , on vérifie facilement que sa trace matricielle est donnée par  $\text{tr}(f) = \overleftarrow{\text{ev}}_V \circ (f \otimes \text{Id}_{V^*}) \circ \overrightarrow{\text{coev}}_V = \text{tr}_L(f) = \text{tr}_R(f)$ . Pour  $f = \text{Id}_V$ , on a en particulier si  $\mathbb{k}$  est de caractéristique 0,  $\dim_{\mathbb{k}}(V) = \text{tr}(\text{Id}_V) = \overleftarrow{\text{ev}}_V \circ \overrightarrow{\text{coev}}_V \in \mathbb{N} \subset \mathbb{k}$ .

Par analogie la dimension catégorique (ou dimension quantique) à gauche de  $V$  est définie par  $\text{qdim}_L(V) = \text{tr}_L(\text{Id}_V)$ . On définit de manière analogue la fonction  $\text{qdim}_R$  et dans le cas d'une catégorie sphérique,  $\text{qdim} = \text{qdim}_L = \text{qdim}_R$ .

**2.3. Le foncteur pivotale.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie pivotale. On définit une catégorie tensorielle  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{\text{p}}$  formée de graphes planaires  $\mathcal{C}$ -coloriés : Nous considérons des graphes en rubans  $\mathcal{C}$ -coloriés qui sont des surfaces compactes décomposées en morceaux élémentaires (voir Turaev ([62]) pour plus de précision). L'âme de ces surfaces constitue un vrai graphe fini pouvant avoir des cercles pour composantes. Les morceaux élémentaires sont des bandes paramétrées par  $[0, 1] \times [0, 1]$ , des anneaux paramétrés par  $S^1 \times [0, 1]$ , et des coupons paramétrés par  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Les bandes et les anneaux sont coloriés par des objets de  $\mathcal{C}$  les coupons sont coloriés par des morphismes de  $\mathcal{C}$ . Les bandes et les coupons ont une base haute  $\{1\} \times [0, 1]$  avec label  $\ll + \gg$  et une base basse  $\{0\} \times [0, 1]$  avec label  $\ll - \gg$ . Les bases des bandes sont soit recollées sur les bases des coupons, soit ils forment les  $\ll$  extrémités  $\gg$  du graphe en rubans  $\mathcal{C}$ -colorié.

Soit  $\Sigma$  une surface orientée. Un graphe en rubans  $\mathcal{C}$ -colorié sur  $\Sigma$  est un plongement préservant l'orientation d'un graphe en rubans  $\mathcal{C}$ -colorié dans  $\Sigma$  dont les extrémités sont situées dans le bord de  $\Sigma$ . Un diagramme de Penrose peut être épaissi et représente alors une unique classe d'isotopie de graphe en rubans  $\mathcal{C}$ -colorié dans  $\Sigma = \mathbb{R} \times [0, 1]$ . Pour l'épaississement d'un diagramme de Penrose, on paramètre les bandes de sorte que l'orientation d'une arête aille de la base basse vers la base haute, et on paramètre les coupons de sorte que la base basse coïncide avec le bas du coupon dans le diagramme.

Les objets de la catégorie  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{\text{p}}$  sont des suites finies de paires  $(V, \varepsilon)$ , où  $V$  est un objet de  $\mathcal{C}$  et  $\varepsilon = \pm$ . Les morphismes de  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{\text{p}}$  sont les  $\mathbb{k}$ -modules librement engendrés par des classes d'isotopie de graphes en rubans  $\mathcal{C}$ -coloriés dans  $\Sigma = \mathbb{R} \times [0, 1]$ . Soit  $\Gamma$  un tel graphe. La lecture de gauche à droite des couleurs des extrémités de  $\Gamma$  contenues dans  $\mathbb{R} \times \{0\}$  accompagnées par les signes donnés par les labels  $\ll + \gg$  ou  $\ll - \gg$  de ces extrémités donne un objet de  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{\text{p}}$  qui est la source de  $\Gamma$ . De manière similaire en prenant pour signes les opposés des labels  $\ll + \gg$  ou  $\ll - \gg$  des extrémités de  $\Gamma$  contenues dans  $\mathbb{R} \times \{1\}$ , on obtient un objet de  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{\text{p}}$  qui est le but de  $\Gamma$ . La composition et le produit tensoriel sont définis par recollement et juxtaposition comme pour les diagrammes de Penrose.

Les axiomes d'une catégorie pivotale font que le calcul de Penrose ne dépend que de la classe d'isotopie des diagrammes. Ainsi, on définit un foncteur similaire à la construction de Reshetikhin-Turaev qui est  $\mathbb{k}$ -linéaire et monoïdal

$$F : \mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{\text{p}} \rightarrow \mathcal{C} \quad (9)$$

$F$  envoie l'objet  $(V, +)$  sur  $V$  et  $(V, -)$  sur  $V^*$ .

**2.4. Les (super)-algèbres de Hopf pivotales.** L'exemple fondamental est celui des représentations d'une  $\mathbb{k}$ -algèbre de Hopf  $H$  pivotale dans des  $\mathbb{k}$ -modules libres de dimension finie. Rappelons simplement qu'une algèbre de Hopf est la donnée d'une  $\mathbb{k}$ -bigèbre possédant une antipode (qui est alors unique). L'*antipode* est un endomorphisme linéaire  $S \in \text{End}_{\mathbb{k}}(H)$  tel que

$$m \circ (S \otimes \text{Id}_H) \circ \Delta = m \circ (\text{Id}_H \otimes S) \circ \Delta = \mu \circ \varepsilon. \quad (10)$$

La *structure pivotale* de  $H$  est la donnée d'un élément  $\phi_0 \in H$  de type groupe (c'est-à-dire  $\Delta(\phi_0) = \phi_0 \otimes \phi_0$ ,  $\varepsilon(\phi_0) = 1$  et donc  $S(\phi_0)$  est l'inverse de  $\phi_0$ ) tel que

$$\forall h \in H, \quad S^2(h) = \phi_0 h \phi_0^{-1}. \quad (11)$$

Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie des représentations de  $H$  dans des  $\mathbb{k}$ -modules libres de dimension finie. Si  $V$  est un objet de  $\mathcal{C}$ , son dual est le  $\mathbb{k}$ -module  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$  muni de l'action de  $H$  donnée par  $(h, \varphi) \mapsto \varphi \circ \rho_V(S(h))$ . Graphiquement, l'action de  $H$  sur  $V^*$  est déterminée par la propriété :

$$\begin{array}{c} \boxed{\text{ev}} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{\rho_{V^*}} \quad \downarrow \\ H \quad V^* \quad V \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{\text{ev}} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{\rho_V} \quad \downarrow \\ V^* \quad H \quad V \end{array} \quad (12)$$

L'élément unité de la catégorie  $\mathcal{C}$  est alors le module  $\mathbb{k}$  munie de la représentation  $\varepsilon : H \rightarrow \mathbb{k} \cong \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k})$ . On peut alors étant donnée une base  $(e_i)_i$  de  $V$  de base duale  $(e_i^*)_i$  décrire les morphismes de dualité par

$$\overrightarrow{\text{ev}}_V : e_i^* \otimes e_j \mapsto e_i^*(e_j) = \delta_i^j, \quad \overrightarrow{\text{coev}}_V : 1 \mapsto \sum_i e_i \otimes e_i^*, \quad (13)$$

$$\overleftarrow{\text{ev}}_V : e_j \otimes e_i^* \mapsto e_i^*(\phi_0 \cdot e_j), \quad \overleftarrow{\text{coev}}_V : 1 \mapsto \sum_i e_i^* \otimes (\phi_0^{-1} \cdot e_i). \quad (14)$$

Enfin la structure pivotale de  $\mathcal{C}$  est donnée par l'application  $H$ -linéaire  $v \mapsto \psi(\phi_0 \cdot v)$  où  $\psi : V \rightarrow V^{**}$  est l'isomorphisme  $\mathbb{k}$ -linéaire canonique de  $V$  dans son bidual.

Une super-algèbre de Hopf pivotale est définie de manière analogue. On exige que l'antipode  $S : H \rightarrow H$  préserve la parité et que l'élément donnant la structure pivotale  $\phi_0$  soit pair. La catégorie paire des super  $H$ -modules qui sont des  $\mathbb{k}$ -modules libres de dimension finie est alors naturellement munie d'une structure pivotale. L'action de  $H$  sur  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$  est déterminée par le calcul graphique (12) où le croisement des arêtes s'interprète comme la super-volte  $\tau^s$ . Les morphismes de dualité  $\overrightarrow{\text{ev}}_V$  et  $\overrightarrow{\text{coev}}_V$  restent donnés par les formules (13) mais les morphismes  $\overleftarrow{\text{ev}}_V$  et  $\overleftarrow{\text{coev}}_V$  sont modifiés en

$$\overleftarrow{\text{ev}}_V = \overrightarrow{\text{ev}}_V \circ (\text{Id}_{V^*} \otimes \rho_V(\phi_0)) \circ \tau^s \quad \text{et} \quad \overleftarrow{\text{coev}}_V = \tau^s \circ (\rho_V(\phi_0^{-1}) \otimes \text{Id}_{V^*}) \circ \overrightarrow{\text{coev}}_V$$

En particulier, si la structure pivotale est triviale ( $\phi_0 = 1$ ) et la caractéristique de  $\mathbb{k}$  est nulle, la dimension catégorique n'est autre que la super dimension :  $\text{qdim}(V) = \text{sdim}_{\mathbb{k}}(V) = \text{dim}_{\mathbb{k}}(V_0) - \text{dim}_{\mathbb{k}}(V_1)$ .

### 3. Catégories enrubannées

**3.1. Définition.** Une catégorie *tressée* est une catégorie  $\mathcal{C}$  tensorielle munie d'un tressage  $c : \text{pour tous objets } V \text{ et } W \text{ de } \mathcal{C}, \text{ on a un isomorphisme}$

$$c_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V.$$

Ces isomorphismes sont naturels et pour tout objets  $U, V$  et  $W$  de  $\mathcal{C}$ , on a

$$c_{U, V \otimes W} = (\text{Id}_U \otimes c_{V,W}) \circ (c_{U,V} \otimes \text{Id}_W) \quad \text{et} \quad c_{U \otimes V, W} = (c_{U,W} \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_U \otimes c_{V,W}).$$

Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie pivotale et tressée, on peut définir une famille d'isomorphismes naturels

$$\theta_V = \text{ptr}_R(c_{V,V}) : V \rightarrow V$$

Nous disons que  $\theta$  est un *twist* s'il est compatible avec la dualité dans le sens suivant :  $\forall V \in \mathcal{C}$ ,

$$\theta_{V^*} = (\theta_V)^*. \quad (15)$$



Une catégorie *enrubannée* est une catégorie pivotale tressée pour laquelle la famille d'isomorphismes  $\theta$  est un twist.

Une catégorie enrubannée est automatiquement  $\mathbb{k}$ -linéaire où  $\mathbb{k} = \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I})$  agit sur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$  par la composée :

$$\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I}) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I} \otimes V, \mathbb{I} \otimes W) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$$

De plus,  $\mathcal{C}$  est alors nécessairement sphérique.

Il est parfois difficile dans une catégorie pivotale tressée de vérifier que la famille d'isomorphismes naturels  $\theta$  est un twist. Dans [27], nous contournons ce problème en introduisant la sous-catégorie pleine  $\mathcal{C}^\theta$  dont les objets sont les objets  $V$  de  $\mathcal{C}$  qui satisfont (15). Il découle des axiomes de  $\mathcal{C}$  que la catégorie  $\mathcal{C}^\theta$  est stable par produit tensoriel et par passage au dual. Elle hérite du tressage et de la structure pivotale de  $\mathcal{C}$ . Par sa définition,  $\mathcal{C}^\theta$  possède un twist et ainsi

**Proposition 1.1.** *La catégorie  $\mathcal{C}^\theta$  est une catégorie enrubannée.*

**3.2. Calcul graphique de Penrose et foncteur enrubannée.** Le calcul graphique de Penrose peut être enrichi dans le cas d'une catégorie  $\mathcal{C}$  tressée par le dessin de croisements représentant le tressage :

$$\begin{array}{c} \swarrow \\ V \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ W \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline c_{V,W} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow \\ W \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ V \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline c_{V,W}^{-1} \\ \hline \end{array}$$

Si la catégorie est aussi pivotale alors la condition (15) est équivalente à l'identité suivante :

$$\forall V \in \mathcal{C}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \theta_V \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{loop}_V \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{loop}_V \\ \downarrow \end{array}$$

Pour les catégories enrubannées ces diagrammes sont interprétés comme la projection plane de graphes en rubans  $\mathcal{C}$ -coloriés plongés dans  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ . Les axiomes d'une catégorie enrubannée impliquent que deux diagrammes représentant des graphes en rubans  $\mathcal{C}$ -coloriés isotopes dans  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  représentent le même morphisme.

Dans [62], Turaev formalise ce calcul et définit une catégorie que nous noterons  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^e$  dont les morphismes sont des graphes en rubans  $\mathcal{C}$ -coloriés spatiaux : Les objets de  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^e$  sont les mêmes que ceux de  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^p$  mais les morphismes sont les classes d'isotopie de graphes en rubans  $\mathcal{C}$ -coloriés plongés dans  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  dont l'intersection avec  $\partial(\mathbb{R}^2 \times [0, 1])$  est formée des extrémités des graphes en rubans et est contenue dans  $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0, 1\}$ . On a un foncteur monoïdal

$$F : \mathcal{G}_{\mathcal{C}}^e \rightarrow \mathcal{C}$$

qui associe à un graphe spatial le morphisme que représente n'importe laquelle de ses projections planes régulières via le calcul de Penrose.

Voici à titre d'exemple le calcul de  $F$  sur un entrelacs de Hopf  $H$  colorié par deux objets  $V$  et  $W$  :

$$H = \begin{array}{c} \text{Hopf link} \\ \text{with strands } V, W \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \text{Hopf link} \\ \text{with strands } V, W \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \text{crossings} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \text{algebraic expression} \\ \hline \end{array}$$

ainsi  $F(H) = (\overleftarrow{\text{ev}}_V \otimes \overleftarrow{\text{ev}}_W) \circ (\text{Id}_{V^*} \otimes c_{W,V} \otimes \text{Id}_{W^*}) \circ (\text{Id}_{V^*} \otimes c_{V,W} \otimes \text{Id}_{W^*}) \circ (\overleftarrow{\text{coev}}_V \otimes \overrightarrow{\text{coev}}_W) \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I}) = \mathbb{k}$ .

**3.3. Catégories modulaires.** Une catégorie modulaire est une catégorie enrubannée semi-simple possédant un nombre fini de classes d'isomorphisme d'objets simples et dont la  $S$ -matrice est inversible : Si  $(V_i)_{i=1\dots n}$  est une famille de représentants des classes d'isomorphisme d'objets simples, la  $S$ -matrice est définie par

$$S = (\text{tr}(c_{V_j, V_i} \circ c_{V_i, V_j}))_{i,j=1\dots n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k}).$$

Reshetikhin et Turaev ont donné ([58]) une construction d'invariants des variétés de dimension 3 et de TQFT qui utilise la donnée d'une catégorie modulaire. Une telle catégorie peut être construite comme un quotient de la catégorie des représentations de  $U_q \mathfrak{sl}(2)$  aux racines de l'unité. Les invariants associés sont alors considérés comme la construction rigoureuse de la généralisation du polynôme de Jones ([32]) dans des 3-variétés prédite par Witten ([70]).

**3.4. Les (super)-algèbres de Hopf enrubannées.** Dans cette section, nous traitons directement le cas des super algèbres de Hopf enrubannées qui contient comme cas particulier les algèbres de Hopf enrubannées.

Une super  $\mathbb{k}$ -bigèbre  $H$  est tressée si

- (1) elle est munie d'une R-matrice universelle :  $R \in (H \otimes H)_0$  inversible telle que

$$\forall x \in H, \tau^s \circ \Delta(x) = R \Delta(x) R^{-1}$$

- (2) La R-matrice universelle satisfait les deux relations suivantes :

$$(\Delta \otimes \text{Id}_H)(R) = R_{13} R_{23} \quad \text{et} \quad (\text{Id}_H \otimes \Delta)(R) = R_{13} R_{12}$$

Si une super  $\mathbb{k}$ -algèbre de Hopf  $H$  tressée, possède une structure pivotale  $\phi_0 \in H$ , alors on peut définir l'élément  $\theta$  inversible, pair et central dans  $H$  :

$$\theta = \phi_0 \cdot (m \circ \tau^s \circ (\text{Id}_H \otimes S)(R))^{-1}.$$

Cet élément satisfait de plus les propriétés

$$\varepsilon(\theta) = 1 \quad \text{et} \quad \Delta(\theta) = \tau^s(R) \cdot R \cdot (\theta \otimes \theta). \quad (16)$$

L'algèbre de Hopf est dite enrubannée si de plus  $\theta$  satisfait la propriété suivante

$$S(\theta) = \theta \quad (17)$$

Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie paire des représentations de  $H$  dans des  $\mathbb{k}$ -modules libres de dimension finie. Alors le tressage de  $H$  permet de définir un tressage sur  $\mathcal{C}$  en posant pour  $V, W \in \mathcal{C}$ ,

$$c_{V,W} = \tau^s \circ R : V \otimes W \rightarrow W \otimes V.$$

Si  $H$  est enrubannée, la famille d'isomorphisme  $(\theta_V)_{V \in \mathcal{C}}$  définie Section 3 est un twist. Le twist est alors donné par l'action de l'élément central :  $\theta_V = \rho_V(\theta)$ .

Pour finir on dit quelques mots sur la topologie  $h$ -adique (voir [18, 39]). Si  $V$  est un  $\mathbb{C}[[h]]$ -module, on note  $\widehat{V} = \varprojlim_n V/h^n V$ .  $\widehat{V}$  est naturellement muni de la topologie limite inverse et d'une action de  $\mathbb{C}[[h]] = \widehat{\mathbb{C}[[h]]}$ . Si  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, on note  $V[[h]] = V \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[h]]$ . Les modules de la forme  $V[[h]]$  sont dits topologiquement libres et en fait ce sont exactement les modules  $V$  sans torsion ( $v \mapsto h.v$  est injective) tels que  $\widehat{V} \cong V$ . Le produit tensoriel complété de deux  $\mathbb{C}[[h]]$ -modules  $V, W$  est défini par

$$V \widehat{\otimes} W = \widehat{V \otimes W}.$$

En particulier, si  $V, W$  sont deux  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels, on a  $V[[h]] \widehat{\otimes} W[[h]] \cong (V \otimes W)[[h]]$ . Les notions de (super) algèbre, bigèbres, algèbres de Hopf (pivotale, tressée ou enrubannée) se généralisent

en les notions de (super)  $\mathbb{C}[[h]]$ -algèbres topologiques  $H$ , (etc) en remplaçant dans toutes les définitions, le produit tensoriel par le produit tensoriel complété. La catégorie des  $H$ -modules topologiquement libres de dimension finie (c'est-à-dire dont le  $\mathbb{C}[[h]]$ -module sous-jacent est de la forme  $V[[h]]$  avec  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie), muni du dual topologique  $V[[h]]^* = V^*[[h]]$ , est alors une catégorie monoïdale avec les structures correspondant à  $H$ .

#### 4. $G^*$ -graduation

Soit un groupe d'élément neutre 1 que nous appelons  $(G^*, \times)$  pour anticiper les notations du chapitre 3. J'introduis ici la notion de  $G^*$ -graduation sur une catégorie pivotale. On trouve parfois dans la littérature la terminologie «  $\mathcal{C}$  fibre sur  $G^*$  » pour décrire une structure similaire.

Nous dirons que la catégorie pivotale  $\mathbb{k}$ -linéaire  $\mathcal{C}$  est  $G^*$ -graduée s'il existe une famille  $(\mathcal{C}_g)_{g \in G^*}$  de sous-catégories pleines de  $\mathcal{C}$  telles que

- (1)  $\mathbb{1} \in \mathcal{C}_1$ .
- (2)  $\forall (g, h) \in G^{*2}, \forall (V, W) \in \mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W) \neq \{0\} \implies g = h$ .
- (3)  $\forall V \in \mathcal{C}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists (g_1, \dots, g_n) \in G^{*n}, \exists V_i \in \mathcal{C}_{g_i}$  pour  $i = 1 \dots n$  tel que  $V \simeq V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ .
- (4)  $\forall (V, W) \in \mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h, V \otimes W \in \mathcal{C}_{gh}$ .
- (5)  $\forall g \in G^*, \mathcal{C}_g$  n'est pas réduite à l'objet nul.

**Exemple :** Soit  $H$  une algèbre de Hopf pivotale et  $C$  une sous algèbre de Hopf commutative dans le centre de  $H$ . Soit  $G^* = \text{Hom}_{\text{Alg}}(C, \mathbb{k})$  l'ensemble des caractères sur  $C$ , c'est-à-dire des morphismes de  $\mathbb{k}$ -algèbres de  $C$  dans  $\mathbb{k}$ .  $G^*$  possède une structure de groupe dont l'élément neutre est la co-unité  $\varepsilon$  (ou plutôt sa restriction à  $C$ ), le produit est donné par  $g.g' = (g \otimes g') \circ \Delta|_C$  et l'inverse par  $g^{-1} = g \circ S|_C$ . Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie des représentations de  $H$  dans des  $\mathbb{k}$ -modules libres de dimension finie possédant une base formée de vecteurs propres pour tous les éléments de  $C$ . Alors il est clair que cette catégorie forme une catégorie pivotale  $\mathbb{k}$ -linéaire  $G^*$ -graduée où  $\mathcal{C}_g$  est la sous catégorie pleine formée des modules  $V$  tels que  $\forall c \in C, \rho_V(c) = g(c) \text{Id}_V$ .

Remarquons que si une catégorie enrubannée  $\mathcal{C}$  est  $G^*$ -graduée, alors le tressage entre  $V \in \mathcal{C}_g$  et  $W \in \mathcal{C}_h$  est un isomorphisme entre  $V \otimes W \in \mathcal{C}_{gh}$  et  $W \otimes V \in \mathcal{C}_{hg}$ . De tels isomorphismes impliquent que  $gh = hg$  et donc que le groupe  $G^*$  est commutatif.



## Traces sur des idéaux et invariants de graphes plongés

Les traces sur des idéaux sont une notion centrale dans les articles [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 20, 21, 11]. Nous en donnons la définition puis nous donnons le théorème principal 2.7. Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante « locale » (la présence d'un objet ambidextre) à l'existence de traces modifiées. Nous définissons aussi les invariants de graphes en rubans plongés qui sont produits à partir de ces traces.

### 1. Traces sur des idéaux

**1.1. Dans les catégories enrubannées.** Soit  $\mathbb{k}$  un anneau commutatif et  $\mathcal{C}$  une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire.

Si  $V, W \in \mathcal{C}$ , on dit que  $V$  est un *rétracte* de  $W$  s'il existe  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$  et  $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, V)$  tels que  $\beta \circ \alpha = \text{Id}_V$ . On écrira alors  $(\alpha, V, \beta) \in W$  ou plus simplement  $V \in W$  si l'on ne souhaite pas préciser les morphismes  $\alpha, \beta$ . Pour motiver cette notation, remarquons que  $V$  est un rétracte de  $W$  lorsque  $V$  est un facteur direct de  $W$ , c'est-à-dire lorsqu'il existe  $U \in \mathcal{C}$  tel que  $W$  soit une somme directe de  $U$  et  $V$ .

**Définition 2.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie enrubannée  $\mathbb{k}$ -linéaire. Une sous-catégorie pleine  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{C}$  est un idéal si elle est stable par produit tensoriel par un élément de  $\mathcal{C}$  et stable par rétracte dans  $\mathcal{C}$ . C'est-à-dire que  $\mathcal{I}$  est un idéal de  $\mathcal{C}$  si pour tous  $U, V, W \in \mathcal{C}$ ,

$$\begin{cases} U \in V \otimes W \\ V \in \mathcal{I} \end{cases} \implies U \in \mathcal{I}.$$

L'intersection d'idéaux est bien sûr un idéal. Ainsi, un exemple important d'idéal de  $\mathcal{C}$  est l'idéal  $\mathcal{I}_V$  engendré par un objet  $V$  de  $\mathcal{C}$  : l'idéal  $\mathcal{I}_V$  est le plus petit idéal contenant  $V$ .

**Proposition 2.2.** Soit  $V \in \mathcal{C}$ , alors

$$\mathcal{I}_V = \{U \in \mathcal{C} : \exists W \in \mathcal{C} : U \in V \otimes W\}.$$

**DÉMONSTRATION.** Clairement, tout idéal contenant  $V$  contient  $\mathcal{I}_V$ . Il suffit donc de montrer que  $\mathcal{I}_V$  est un idéal. Soit donc  $V' \in \mathcal{I}_V$ . On a donc  $(\alpha, V', \beta) \in V \otimes W'$  où  $W' \in \mathcal{C}$ . Soit  $W \in \mathcal{C}$  et  $(\gamma, U, \delta) \in V' \otimes W$  alors on a  $((\alpha \otimes \text{Id}_W) \circ \gamma, U, \delta \circ (\beta \otimes \text{Id}_W)) \in V \otimes (W' \otimes W)$  donc  $U \in \mathcal{I}_V$ .  $\square$

Nous définissons la notion de *trace (modifiée) sur un idéal* en adaptant les propriétés (7) et (8) satisfaites par la trace catégorique  $\text{tr}$  :

**Définition 2.3.** Soit  $\mathcal{I}$  un idéal de  $\mathcal{C}$ .

La famille d'applications linéaires  $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_V : \text{End}_{\mathcal{C}}(V) \rightarrow \mathbb{k})_{V \in \mathcal{I}}$  est une trace sur  $\mathcal{I}$  si elle satisfait :

$$\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V), \forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, U), \quad \mathbf{t}_V(f \circ g) = \mathbf{t}_U(g \circ f) \quad (18)$$

$$\forall f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(V \otimes W), \quad \mathbf{t}_{V \otimes W}(f) = \mathbf{t}_V(\text{ptr}_R(f)) \quad (19)$$

Bien sûr, la trace catégorique est un exemple de trace sur l'idéal  $\mathcal{I} = \mathcal{C}$ .

**1.2. Dans les catégories pivotales.** Les notions de trace et d'idéal ont un analogue non commutatif dans les catégories pivotales. Il convient alors de distinguer idéal à droite et idéal à gauche, trace à droite et trace à gauche.

**Définition 2.4.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie pivotale  $\mathbb{k}$ -linéaire. Une sous catégorie pleine  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{C}$  est un idéal à droite si elle est stable par produit tensoriel à droite par un élément de  $\mathcal{C}$  et stable par rétracte dans  $\mathcal{C}$ . C'est-à-dire que  $\mathcal{I}$  est un idéal de  $\mathcal{C}$  si pour tous  $U, V, W \in \mathcal{C}$ ,

$$\begin{cases} U \in V \otimes W \\ V \in \mathcal{I} \end{cases} \implies U \in \mathcal{I}.$$

On définit de manière similaire la notion d'idéal à gauche et on appelle idéal (bilatère) un idéal à droite qui est aussi un idéal à gauche. Les notions d'idéaux engendrés par un élément sont similaires et la proposition 2.2 a ses analogues : par exemple, l'idéal à gauche engendré par  $V \in \mathcal{C}$  est  $\{U \in \mathcal{C} : \exists W \in \mathcal{C} : U \in W \otimes V\}$  et l'idéal bilatère engendré par  $V \in \mathcal{C}$  est  $\{U \in \mathcal{C} : \exists W, W' \in \mathcal{C} : U \in W \otimes V \otimes W'\}$ .

Une trace à droite  $t = (t_V : \text{End}_{\mathcal{C}}(V) \rightarrow \mathbb{k})_{V \in \mathcal{I}}$  sur un idéal à droite  $\mathcal{I}$  est définie par les propriétés (18) et (19) de la définition 2.3. Pour une trace à gauche  $t = (t_V : \text{End}_{\mathcal{C}}(V) \rightarrow \mathbb{k})_{V \in \mathcal{I}}$  sur un idéal à gauche  $\mathcal{I}$ , il convient de remplacer (19) par son analogue à gauche :  $\forall V \in \mathcal{I}, \forall W \in \mathcal{C}, \forall f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(W \otimes V), t_{W \otimes V}(f) = t_V(\text{ptr}_L(f))$ . Enfin une trace sur un idéal bilatère est une trace à droite qui est aussi une trace à gauche sur cet idéal.

La trace catégorique à droite (resp. à gauche) est une trace à droite (resp. à gauche) sur l'idéal  $\mathcal{I} = \mathcal{C}$ . Si la catégorie est sphérique, ce sont des traces.

Pour finir, remarquons que si  $\mathcal{C}$  est une catégorie enrubannée, considérée comme un cas particulier de catégorie pivotale, alors tout idéal à droite ou à gauche est un idéal bilatère et les notions de trace à gauche, de trace à droite et de trace coïncident.

**1.3. Objets ambidextres.** Nous commençons par donner la définition d'un objet ambidextre dans une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire. Cette définition généralise celles de [28, 20, 30]. Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire et  $V \in \mathcal{C}$  un objet simple. L'objet  $V$  est dit *ambidextre à droite* s'il possède un dual  $V^*$  à gauche et à droite (c'est à dire qu'il existe dans  $\mathcal{C}$  deux dualités  $(V^*, V, \overrightarrow{\text{ev}}_V, \overrightarrow{\text{coev}}_V)$  et  $(V, V^*, \overleftarrow{\text{ev}}_V, \overleftarrow{\text{coev}}_V)$ ) et si  $\forall f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(V \otimes V^*)$ ,

$$(\overleftarrow{\text{ev}}_V \otimes \text{Id}_V) \circ (f \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_V \otimes \overleftarrow{\text{coev}}_V) = (\text{Id}_V \otimes \overrightarrow{\text{ev}}_V) \circ (f \otimes \text{Id}_V) \circ (\overrightarrow{\text{coev}}_V \otimes \text{Id}_V) \quad (20)$$

**Lemme 2.5.** La définition d'un objet ambidextre à droite est indépendant du choix des dualités.

DÉMONSTRATION. Soit  $(V', V, \overrightarrow{\text{ev}}'_V, \overrightarrow{\text{coev}}'_V)$  et  $(V, V', \overleftarrow{\text{ev}}'_V, \overleftarrow{\text{coev}}'_V)$  deux autres dualités dans  $\mathcal{C}$ . Tout d'abord,  $V^*$  et  $V'$  sont isomorphes : soit par l'unicité du dual à gauche de  $V$ , c'est à dire par l'isomorphisme  $\alpha = (\overrightarrow{\text{ev}}'_V \otimes \text{Id}_{V'}) \circ (\text{Id}_{V^*} \otimes \overrightarrow{\text{coev}}'_V) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V^*, V')$  dont l'inverse est donné par  $\alpha^{-1} = (\overrightarrow{\text{ev}}_V \otimes \text{Id}_{V'}) \circ (\text{Id}_{V'} \otimes \overrightarrow{\text{coev}}_V)$ ; soit par l'unicité du dual à droite de  $V$ , c'est-à-dire par l'isomorphisme  $\beta = (\text{Id}_{V'} \otimes \overleftarrow{\text{ev}}_V) \circ (\overleftarrow{\text{coev}}'_V \otimes \text{Id}_{V^*}) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V^*, V')$  dont l'inverse est donné par  $\beta^{-1} = (\text{Id}_{V^*} \otimes \overleftarrow{\text{ev}}'_V) \circ (\overleftarrow{\text{coev}}_V \otimes \text{Id}_{V'})$ . De plus, les morphismes de dualités donnent des isomorphismes  $\text{End}_{\mathcal{C}}(V^*) \simeq \text{End}_{\mathcal{C}}(V') \simeq \text{End}_{\mathcal{C}}(V) \simeq \mathbb{k}$ . Ainsi,  $V^*$  et  $V'$  sont simples et  $\alpha \circ \beta^{-1}$  est un endomorphisme scalaire.

Soit  $f' \in \text{End}_{\mathcal{C}}(V \otimes V')$  et appliquons (20) à  $f = (\text{Id}_V \otimes \alpha^{-1}) \circ f' \circ (\text{Id}_V \otimes \alpha) \in \text{End}_{\mathcal{C}}(V \otimes V^*)$  : le membre de droite de cette égalité devient  $(\text{Id}_V \otimes \overrightarrow{\text{ev}}'_V) \circ (f' \otimes \text{Id}_V) \circ (\overrightarrow{\text{coev}}'_V \otimes \text{Id}_V)$  tandis que le membre de gauche devient

$(\overleftarrow{\text{ev}}'_V \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_V \otimes (\beta \circ \alpha^{-1})) \circ (\text{Id}_V \otimes \text{Id}_V) \circ (f' \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_V \otimes (\alpha \circ \beta^{-1})) \circ (\text{Id}_V \otimes \overleftarrow{\text{coev}}'_V)$ . Pour finir, il suffit de remarquer que  $\alpha \circ \beta^{-1}$  et  $\beta \circ \alpha^{-1}$  sont des endomorphismes scalaires qui se simplifient.  $\square$

On définit de manière similaire un objet *ambidextre à gauche*. L'équation (20) est alors remplacée par  $\forall f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(V^* \otimes V)$ ,

$$(\overleftarrow{\text{ev}}_V \otimes \text{Id}_V) \circ (\text{Id}_V \otimes f) \circ (\text{Id}_V \otimes \overleftarrow{\text{coev}}_V) = (\text{Id}_V \otimes \overrightarrow{\text{ev}}_V) \circ (\text{Id}_V \otimes f) \circ (\overrightarrow{\text{coev}}_V \otimes \text{Id}_V)$$

**Remarque 2.6.** Nous donnons dans [30] une définition équivalente mais différente de celle donnée ici pour un objet ambidextre à droite  $V$  dans une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire pivotale  $\mathcal{C}$  : Par définition dans [30], un objet simple  $V$  est ambidextre à droite si  $\forall f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(V^* \otimes V)$ ,

$$\phi_V^{-1} \circ (\text{ptr}_R(f))^* \circ \phi_V = \text{ptr}_L(f) \quad (21)$$

où  $\phi_V : V \rightarrow V^{**}$  est l'isomorphisme de la structure pivotale (cf (5)).

Nous avons formulé la première définition d'un objet ambidextre dans le cadre d'une catégorie enrubannée (cf [28, section 3]). Dans ce cadre, la définition équivalente donnée est la suivante : L'objet simple  $V$  est ambidextre si  $\forall f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(V \otimes V)$ ,

$$\text{ptr}_L(f) = \text{ptr}_R(f) \quad \text{i.e.} : \quad F \left( \begin{array}{c} \downarrow \\ \left( \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \boxed{f} \\ \circlearrowright \end{array} \right) \\ \downarrow \end{array} \right) = F \left( \begin{array}{c} \downarrow \\ \left( \begin{array}{c} \circlearrowright \\ \boxed{f} \\ \circlearrowleft \end{array} \right) \\ \downarrow \end{array} \right) \quad (22)$$

Pour l'équivalence entre les définitions (22) et (21) dans une catégorie enrubannée, nous renvoyons à [30, Remark 9]. L'équivalence entre les définitions (21) et (20) dans une catégorie pivotale se démontre de manière similaire en utilisant l'isomorphisme  $\text{End}_{\mathcal{C}}(V \otimes V^*) \simeq \text{End}_{\mathcal{C}}(V^* \otimes V)$ ,  $f \mapsto (\text{Id}_{V^* \otimes V} \otimes \overrightarrow{\text{ev}}_V) \circ (\text{Id}_{V^*} \otimes f \otimes \text{Id}_V) \circ (\overleftarrow{\text{coev}}_V \otimes \text{Id}_{V^* \otimes V})$ .

Le théorème principal est le suivant :

**Théorème 2.7.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie pivotale  $\mathbb{k}$ -linéaire et  $V \in \mathcal{C}$  un objet simple. Soit  $\mathcal{I}_V$  l'idéal à droite engendré par  $V$ . Alors il existe une trace à droite non nulle sur  $\mathcal{I}_V$  si et seulement si  $V$  est ambidextre à droite. De plus dans ce cas,  $\forall d \in \mathbb{k}$ , il existe une unique trace à droite  $\mathfrak{t}$  sur  $\mathcal{I}_V$  telle que  $\mathfrak{t}_V(\text{Id}_V) = d$ .

Le théorème précédent reste valable en remplaçant « droite » par « gauche » et dans le cas des catégories enrubannées, il donne une condition nécessaire et suffisante à l'existence de trace sur l'idéal  $\mathcal{I}_V$ . Remarquons que la preuve est constructive et que le théorème implique l'unicité d'une telle trace à un scalaire global près. Ce théorème est en fait un cas particulier du théorème 2.17 ci-après.

## 2. Invariants de graphes plongés

**2.1. Graphes spatiaux et catégories enrubannées.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire enrubannée,  $\mathcal{I}$  un idéal de  $\mathcal{C}$  et  $\mathfrak{t}$  une trace sur  $\mathcal{I}$ .

On appelle  $\mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{C})$  l'ensemble des graphes en rubans  $\mathcal{C}$ -coloriés fermés c'est-à-dire des graphes en rubans  $\mathcal{C}$ -coloriés dans  $S^3$ . On a  $\mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{C}) \cong \text{End}_{\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^e}(\emptyset)$ .

J'introduis la notion de présentation coupée d'un graphe en rubans  $\mathcal{C}$ -colorié fermé : Si un diagramme  $T$  représente un graphe en rubans  $\mathcal{C}$ -colorié qui est un endomorphisme de  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^e$ , ses parties basses et hautes sont formées par les mêmes séquences de  $k$  brins coloriés verticaux. Il est alors possible, comme pour une tresse à  $k$  brins, d'en considérer la fermeture  $\widehat{T}$  obtenue en rejoignant ses  $k$  sommets du haut aux  $k$  sommets du bas par  $k$  brins parallèles. Cette construction est en fait la trace catégorique dans  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^e$  : on a  $\widehat{T} = \text{tr}(T) \in \text{End}_{\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^e}(\emptyset)$ . On dit alors que  $T$  est une *présentation coupée* à  $k$  brins du graphe fermé  $\widehat{T}$  et que  $\widehat{T}$  est la *fermeture* de  $T$ .

Soit  $\mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{I})$  l'ensemble des graphes en rubans  $\mathcal{C}$ -coloriés dans  $S^3$  dont l'une au moins des couleurs de leurs arêtes est un objet de  $\mathcal{I}$ . Tout graphe en rubans  $\widehat{T}$  de  $\mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{I})$  possède une présentation coupée à 1 brin  $T \in \text{End}_{\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^e}((V, +))$  où  $V \in \mathcal{I}$ .

**Théorème 2.8.** *L'application*

$$\begin{aligned} F' : \mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{I}) &\rightarrow \mathbb{k} \\ \widehat{T} &\mapsto \mathfrak{t}_V(F(T)) \end{aligned} \quad (23)$$

est bien définie. Ici,  $V \in \mathcal{I}$ ,  $T \in \text{End}_{\mathcal{G}_{S^3}}((V, +))$  est une présentation coupée à un brin de  $\widehat{T}$ . C'est-à-dire que le scalaire  $\mathfrak{t}_V(F(T))$  ne dépend pas du choix de  $T$  mais seulement de la classe d'isotopie de  $\widehat{T}$  dans  $S^3$ .

DÉMONSTRATION. L'idée de la preuve de ce théorème se trouve déjà dans [22] mais le résultat y est réduit à une sous-classe de graphes pour lesquels les couleurs des arêtes sont des objets simples, ce qui nous permet de ramener le calcul de la trace à un calcul de dimension modifiée.

L'idée générale est la suivante : le choix de  $T$  revient à choisir une arête de  $\widehat{T}$  en laquelle le graphe est coupé. Un autre choix  $T'$  donne une deuxième arête de  $\widehat{T}$  en laquelle le graphe peut être coupé. En coupant  $\widehat{T}$  en ces deux endroits, on obtient un graphe en rubans  $T_2 \in \text{End}_{\mathcal{G}_{S^3}}(((V, +), (V', +)))$  qui est une présentation à deux brins de  $\widehat{T}$  et tel que

$$T = \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{T_2} \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \quad \text{et} \quad T' = \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \boxed{T_2} \\ \curvearrowright \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}$$

Ensuite on utilise les propriétés de compatibilité de  $\mathfrak{t}$  avec les traces partielles :

$$\mathfrak{t}_V(F(T)) = \mathfrak{t}_V(\text{ptr}_R(F(T_2))) = \mathfrak{t}_{V \otimes V'}(F(T_2)) = \mathfrak{t}_{V'}(\text{ptr}_L(F(T_2))) = \mathfrak{t}_{V'}(F(T'))$$

□

## 2.2. Graphes sphériques et catégories pivotales.

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire pivotale,  $\mathcal{I}$  un idéal à droite de  $\mathcal{C}$  et  $\mathfrak{t}$  une trace à droite sur  $\mathcal{I}$ .

Soit  $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{C}) = \text{End}_{\mathcal{G}_{\mathbb{R}^2}}(\emptyset)$  l'ensemble des classes d'isotopie de graphes en rubans  $\mathcal{C}$ -coloriés dans  $\mathbb{R}^2$  (graphes planaires). Comme pour les graphes spatiaux, il existe des applications,

$$\text{End}_{\mathcal{G}_{\mathbb{R}^2}}((V, \varepsilon)) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{C}), T \mapsto \widehat{T} = \left( \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{T} \\ \downarrow \end{array} \right)$$

obtenues par la fermeture à droite de  $T$  (qui est différente dans ce contexte de la fermeture à gauche). On dit alors que  $T$  est une présentation coupée à droite à un brin de  $\widehat{T}$ . Nous disons que  $T \in \text{End}_{\mathcal{G}_{\mathbb{R}^2}}((V, \varepsilon))$  est admissible si  $F((V, \varepsilon)) \in \mathcal{I}$ . Soit  $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{I})$  l'ensemble des classes d'isotopie de graphes en rubans planaires ayant une présentation admissible.

**Théorème 2.9.** *L'application*

$$\begin{aligned} F' : \mathcal{G}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{I}) &\rightarrow \mathbb{k} \\ \widehat{T} &\mapsto \mathfrak{t}_V(F(T)) \end{aligned} \quad (24)$$

où  $T$  est une présentation coupée à droite de  $\widehat{T}$ , est bien définie. C'est-à-dire que le scalaire  $\mathfrak{t}_V(F(T))$  ne dépend pas du choix de  $T$  mais seulement de la classe d'isotopie du graphe planaire  $\mathcal{C}$ -colorié  $\widehat{T}$ .

DÉMONSTRATION. Ce théorème est contenu dans [30, Theorem 4.5] nous en donnons aussi une esquisse. Il est très similaire au cas des graphes spatiaux avec la différence notable que l'on ne peut couper un graphe planaire  $\widehat{T}$  qu'en une arête extérieure (bordant la région infinie de  $\mathbb{R}^2 \setminus \widehat{T}$ ). Étant donné deux présentations admissibles  $T$  et  $T'$  de  $\widehat{T}$ , on coupe ce dernier graphe le long d'un chemin





DÉMONSTRATION. Ici encore, nous esquissons la démonstration que nous donnons dans [30, Theorem 6]. Un graphe en rubans planaire  $\widehat{T}$  peut être vu comme un graphe sphérique dont l'une des régions de  $S^2 \setminus \widehat{T}$  est distinguée (la région « infinie » contenant  $\infty \in S^2 \simeq \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ ). La propriété  $\mathbf{t}_V = \mathbf{t}_V^\vee$  appliquée à  $F(T)$  où  $T \in \text{End}_{\mathcal{G}^p}((V, +))$  implique que  $\mathbf{t}_V(F(T)) = \mathbf{t}_{V^*}(F(T^*))$  où  $T^*$  est le graphe image de  $T$  par une rotation d'angle  $\pi$ . Mais  $\widehat{T}^*$  est le même graphe sphérique que  $\widehat{T}$ , la seule différence étant que la région infinie se trouve de l'autre côté de l'arête coupée pour obtenir  $T$ . Ainsi, cette relation permet de changer la région distinguée pour une région adjacente et finalement de prouver que  $\mathbf{t}_V(F(T))$  ne dépend que du graphe sphérique associé à  $\widehat{T}$ .  $\square$

**Remarque 2.13.**  $F'$  n'est défini que pour des graphes en rubans fermés. Dans [28], dans le cadre d'une catégorie  $\mathbb{k}$  linéaire enrubannée, nous étendons  $F'$  à des graphes en rubans non fermés. Nous appelons le résultat de cette extension, compte tenu de ses propriétés, un quasi-foncteur  $F$ -bilinéaire monoïdal.

### 3. Exemples et propriétés

Nous développons ici des propriétés algébriques des traces sur les idéaux et des objets ambidextres ainsi que quelques exemples à l'exception d'exemples provenant des groupes quantiques que nous développons dans la partie suivante. Dans toute cette section,  $\mathbb{k}$  est un corps.

**3.1. Traces ambidextres et dimensions modifiées.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire pivotale. Remarquons que si  $V$  est simple, une forme linéaire sur  $\text{End}_{\mathcal{C}}(V)$  est déterminée par sa valeur sur  $\text{Id}_V$ . Ainsi le théorème 2.7 peut s'interpréter comme une correspondance entre les formes linéaires sur  $\text{End}_{\mathcal{C}}(V)$  et les traces à droite sur  $\mathcal{I}_V$ . Ceci amène naturellement la généralisation suivante :

**Définition 2.14.** Soit  $V \in \mathcal{C}$  et  $t : \text{End}_{\mathcal{C}}(V) \rightarrow \mathbb{k}$  une forme linéaire. L'application  $t$  est une trace ambidextre à droite sur  $V$  si  $\forall f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(V^* \otimes V)$ ,

$$t(\phi_V^{-1} \circ (\text{ptr}_R(f))^* \circ \phi_V) = t(\text{ptr}_L(f)) \quad (26)$$

où  $\phi_V : V \rightarrow V^{**}$  est l'isomorphisme de la structure pivotale (cf (5)).

La relation entre les notions de traces ambidextres et d'objets ambidextres est donné par la proposition suivante :

**Proposition 2.15.** Soit  $V \in \mathcal{C}$  un objet simple ; alors l'unique forme linéaire sur  $\text{End}_{\mathcal{C}}(V)$  envoyant  $\text{Id}_V$  sur  $d \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$  est ambidextre à droite si et seulement si  $V$  est ambidextre à droite.

**Remarque 2.16.** Un objet  $V$  tel que  $\text{End}_{\mathcal{C}}(V) = \mathbb{k} \cdot \text{Id}_V$  est dit absolument simple dans [20]. Nous y étendons la définition d'un objet ambidextre aux objets  $V$  absolument indécomposables c'est-à-dire ceux pour lesquels le quotient de l'anneau des endomorphismes par son radical de Jacobson (i.e. l'intersection de ses idéaux maximaux) est égal à  $\mathbb{k} : \text{End}_{\mathcal{C}}(V) / \text{Rad}(\text{End}_{\mathcal{C}}(V)) = \mathbb{k} \cdot \text{Id}_V$ .

Si  $\mathcal{I}$  est un idéal à droite, appelons  $\mathcal{T}(\mathcal{I})$  l'ensemble des traces à droite sur  $\mathcal{I}$  (qui est un  $\mathbb{k}$ -module). Le théorème suivant généralise le théorème 2.7 :

**Théorème 2.17.** Soit  $V \in \mathcal{C}$ . Alors l'application  $\mathcal{T}(\mathcal{I}_V) \ni \mathbf{t} \mapsto \mathbf{t}_V$  réalise une bijection entre l'ensemble des traces à droite sur  $\mathcal{I}_V$  et l'ensemble des traces ambidextres à droite sur  $V$ .

DÉMONSTRATION. Pour cette preuve, nous renvoyons à [30, Section 4.5] ou dans le contexte des catégories enrubannées à [20, Theorem 3.3.2]. Nous expliquons ici rapidement comment  $\mathbf{t}_V$  détermine  $\mathbf{t}$  : Si  $U \in \mathcal{I}_V$  et  $g \in \text{End}_{\mathcal{C}}(U)$  alors on choisit  $(\alpha, U, \beta) \in V \otimes W$  et  $\mathbf{t}_U(g)$  est déterminé par :

$$\mathbf{t}_U(g) = \mathbf{t}_U(g \circ \beta \circ \alpha) = \mathbf{t}_{V \otimes W}(\alpha \circ g \circ \beta) = \mathbf{t}_V(\text{ptr}_R(\alpha \circ g \circ \beta)).$$

Ensuite, il est facile de vérifier que les propriétés de  $\mathfrak{t}$  impliquent que  $\mathfrak{t}_V$  est ambidextre à droite.

Réciproquement on vérifie que si  $\mathfrak{t}_V = t$  est une trace ambidextre à droite sur  $V$ , alors la formule ci-dessus définit bien une trace sur  $\mathcal{I}_V$  (et en particulier est indépendante du choix des morphismes  $\alpha$  et  $\beta$ ).  $\square$

Nous définissons maintenant la notion de dimension modifiée associée à une trace.

**Définition 2.18.** Soit  $\mathfrak{t}$  une trace à droite sur un idéal à droite  $\mathcal{I}$ . La dimension modifiée associée à  $\mathfrak{t}$  est la fonction  $\mathfrak{d} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{k}$  définie par  $\mathfrak{d}(U) = \mathfrak{t}(\text{Id}_U)$ .

La connaissance d'une formule explicite des dimensions modifiées des objets simples d'un idéal  $\mathcal{I}$  permet de calculer simplement l'invariant  $F'$  (voir la proposition 2.25 ci-après).

**3.2. Propriétés algébriques.** Nous donnons ici quelques propriétés des traces sur les idéaux démontrées dans [20, 21, 30].

**Proposition 2.19.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie abélienne  $\mathbb{k}$ -linéaire enrubannée. Soit  $U, V \in \mathcal{C}$  avec  $U \in \mathcal{I}_V$ .

L'épimorphisme  $\overrightarrow{\text{ev}}_U \otimes \text{Id}_V : U^* \otimes U \otimes V \rightarrow V \rightarrow 0$  est scindé ssi  $\mathcal{I}_U = \mathcal{I}_V$ .

Cela signifie en particulier que si  $\mathcal{I}_U = \mathcal{I}_V$ , alors  $V \in U \otimes U^* \otimes V$ .

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire pivotale. Rappelons qu'un objet  $P \in \mathcal{C}$  est projectif si pour tout  $X \in \mathcal{C}$ , tout épimorphisme  $p : X \rightarrow P$  se complète en un rétracte  $(s, P, p) \in X$ . On appelle  $\text{Proj}$  la sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  formée des objets projectifs.

**Proposition 2.20.**

- (1)  $\forall V, W \in \mathcal{C}, \quad V \in \mathcal{I}_W \iff \mathcal{I}_V \subset \mathcal{I}_W$
- (2)  $\text{Proj}$  est un idéal de  $\mathcal{C}$ , en particulier  $\text{Proj} = \text{Proj}^*$  (qui est aussi la sous-catégorie des objets injectifs).
- (3)  $\forall V \in \mathcal{C}, \forall P \in \text{Proj}$  non nuls, on note  $0$  l'idéal des objets nuls et on a

$$\mathcal{C} = \mathcal{I}_{\mathbb{1}} \supset \mathcal{I}_V \supset \mathcal{I}_P = \text{Proj} \supset 0.$$

**Proposition 2.21.** Soit  $U, V \in \mathcal{C}$  avec  $U \in \mathcal{I}_V$  où  $V$  est ambidextre à droite. On note  $\mathfrak{d}$  la fonction dimension non nulle sur  $\mathcal{I}_V$  (qui est unique à un scalaire près). Alors,  $\mathfrak{d}(U) \neq 0 \implies \mathcal{I}_U = \mathcal{I}_V$ . Si de plus  $U$  est simple, alors cette implication est une équivalence et de plus  $\mathfrak{d}(U) \neq 0 \implies U$  est ambidextre à droite.

Dans bien des cas, il est possible d'effectuer un calcul explicite de la valeur de  $F$  sur l'entrelacs de Hopf long. Si  $U, V \in \mathcal{C}$  sont des objets simples d'une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire enrubannée, on appelle  $S'(U, V)$  le scalaire tel que  $\text{ptr}_L(c_{V,U} \circ c_{U,V}) = S'(U, V) \text{Id}_V$  :

$$S'(U, V) \text{Id}_V = F \left( \begin{array}{c} \bigoplus \\ \downarrow \\ \bigoplus \end{array} \right)$$

**Proposition 2.22.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire enrubannée. Si  $U, V \in \mathcal{C}$  sont simples, alors

$$S'(U, V) \neq 0 \implies V \in \mathcal{I}_U.$$

Si de plus,  $U$  est ambidextre, soit  $\mathfrak{t}$  une trace sur  $\mathcal{I}_U$  et  $\mathfrak{d}$  sa fonction dimension associée. Alors

$$\mathfrak{d}(V) = \frac{S'(V, U)}{S'(U, V)} \mathfrak{d}(U).$$

Ainsi, pour  $U$  ambidextre fixé, tout objet simple  $V$  de  $\mathcal{C}$  vérifiant  $S'(V, U)S'(U, V) \neq 0$  est ambidextre et engendre le même idéal que  $U$ .

DÉMONSTRATION. Si  $S'(U, V)$  est inversible, alors  $(\alpha, V, \overrightarrow{\text{ev}}_U \otimes \text{Id}_V) \in U^* \otimes U \otimes V$  où  $\alpha = S'(U, V)^{-1}(\text{Id}_{U^*} \otimes (c_{V,U} \circ c_{U,V})) \circ (\overleftarrow{\text{coev}}_U \otimes \text{Id}_V)$  et donc  $V \in \mathcal{I}_U$ . La relation entre dimensions modifiées est alors une conséquence du fait que  $S'(U, V) \mathbf{d}(V) = S'(V, U) \mathbf{d}(U)$  est la valeur prise par  $F'$  sur l'entrelacs de Hopf dont les composantes sont coloriées par  $U$  et  $V$ . Pour finir, remarquons que l'unique (à un scalaire près) forme linéaire sur  $\text{End}_{\mathcal{C}}(V)$  est nécessairement ambidextre par le théorème 2.17 appliqué à  $\mathcal{I}_U = \mathcal{I}_V$ .  $\square$

Nous donnons deux propositions qui sont des outils pour détecter des objets ambidextres. Disons que deux objets  $U, V \in \mathcal{C}$  sont *orthogonaux* si  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V) = \{0\} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, U)$ .

**Proposition 2.23.** *Supposons que  $\mathcal{C}$  soit enrubannée et que  $V \in \mathcal{C}$  soit un objet simple. Alors (1)  $\implies$  (2)  $\implies$  (3)  $\implies$  (4).*

- (1)  $V \otimes V$  est une somme directe d'objets simples deux à deux orthogonaux.
- (2)  $\text{End}_{\mathcal{C}}(V \otimes V)$  est commutatif.
- (3)  $c_{V,V}$  est central dans  $\text{End}_{\mathcal{C}}(V \otimes V)$ .
- (4)  $V$  est ambidextre.

DÉMONSTRATION. Pour montrer (3)  $\implies$  (4), on utilise la remarque 2.6 et le fait que  $\forall f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(V \otimes V)$ , on a

$$\text{ptr}_L(f) = \text{ptr}_L\left(c_{V,V} \circ f \circ c_{V,V}^{-1}\right) = \text{ptr}_R(f).$$

$\square$

Supposons maintenant que  $\mathcal{C}$  est une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire pivotale où  $\mathbb{k}$  est un corps. On suppose de plus que les sommes directes finies d'objets de  $\mathcal{C}$  existent et que tout objet de  $\mathcal{C}$  est une somme directe d'un nombre fini d'objets absolument indécomposables uniques à isomorphisme près (un objet  $V$  est absolument indécomposable si  $\text{End}_{\mathcal{C}}(V)/\text{Rad}(\text{End}_{\mathcal{C}}(V)) \simeq \mathbb{k}$  où  $\text{Rad}$  est le radical de Jacobson, c'est-à-dire l'intersection des idéaux maximaux). Dans ce contexte, si  $V \in \mathcal{C}$  est simple, on peut écrire

$$V \otimes V^* \simeq \bigoplus_{i=1}^n W_i,$$

où les  $W_i$  sont des objets absolument indécomposables.

**Théorème 2.24.** *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un unique  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  et un unique  $j_0 \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I}, W_{i_0}) \neq 0$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W_{j_0}, \mathbb{I}) \neq 0$ . De plus les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $i_0 = j_0$ ,
- (2)  $W_{i_0} \simeq W_{i_0}^*$ ,
- (3)  $V$  est ambidextre à droite.

DÉMONSTRATION. La démonstration de ce théorème est dans l'article [21]. Le point clé est que si  $f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(V \otimes V^*)$ , alors  $\overleftarrow{\text{ev}}_V \circ f = \lambda \overleftarrow{\text{ev}}_V$  où  $\lambda$  est la valeur propre de  $f$  sur  $W_{j_0}$  ( $f - \lambda$  est dans le radical de  $\text{End}_{\mathcal{C}}(W_{j_0})$ ) tandis que  $f \circ \overrightarrow{\text{coev}}_V = \mu \overrightarrow{\text{coev}}_V$  où  $\mu$  est la valeur propre de  $f$  sur  $W_{i_0}$ . L'égalité  $\lambda = \mu$  pour tout  $f$  équivaut donc au fait que  $V$  soit ambidextre à droite.  $\square$

**3.3. Propriétés de  $F'$ .** Nous donnons ici quelques propriétés des invariants de graphes en rubans  $F'$  et leurs relations avec le foncteur  $F$ .

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire pivotale,  $\mathcal{I}$  un idéal à droite de  $\mathcal{C}$  muni d'une trace à droite  $\mathfrak{t}$  dont la dimension modifiée associée est notée  $\mathfrak{d}$ .

**Proposition 2.25.** *Si  $T \in \text{End}_{\mathcal{G}_{\mathbb{R}^2}^{\mathcal{C}}}(V, +)$  est une présentation coupée à droite d'un graphe  $\widehat{T} \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{I})$  où  $V \in \mathcal{I}$  est simple, et si  $\langle T \rangle \in \mathbb{k}$  est le scalaire tel que  $F(T) = \langle T \rangle \cdot \text{Id}_V$ , alors on a :*

$$F'(\widehat{T}) = \mathfrak{d}(V)\langle T \rangle \quad (27)$$

DÉMONSTRATION. la trace  $\mathfrak{t}_V$  est déterminée par  $\mathfrak{d}(V)$ . En effet, on a  $F'(\widehat{T}) = \mathfrak{t}_V(F(T)) = \mathfrak{t}_V(\langle T \rangle \cdot \text{Id}_V) = \langle T \rangle \mathfrak{t}_V(\text{Id}_V) = \mathfrak{d}(V)\langle T \rangle$ .  $\square$

Remarquons que la même proposition reste valable dans une catégorie enrubannée pour le calcul de  $F'$  sur un graphe  $\widehat{T} \in \mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{I})$ . Cette proposition a une conséquence directe pour la valeur de  $F'$  sur certaines sommes connexe de graphes :

Si deux graphes en rubans  $\mathcal{C}$ -coloriés (dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , la sphère  $S^2$  ou la sphère  $S^3$ )  $\widehat{T}_1$  et  $\widehat{T}_2$  ont des présentations coupées  $T_1, T_2$  qui sont des endomorphismes du même objet  $(V, \varepsilon)$ , on appelle *somme connexe en bande* le long des arêtes  $(e_1, e_2)$  le graphe en rubans  $\mathcal{C}$ -colorié de même nature  $\widehat{T}_1 \mathfrak{b}_{e_1, e_2} \widehat{T}_2 = \widehat{T}_1 \circ \widehat{T}_2 = \widehat{T}_2 \circ \widehat{T}_1$  où  $e_1$ , respectivement  $e_2$  sont les arêtes de  $\widehat{T}_1$  et de  $\widehat{T}_2$  qui sont coupées dans leur présentation. Alors si l'objet  $V$  est simple, chaque fois que cette égalité a un sens, on a

$$F'(\widehat{T}_1 \mathfrak{b}_{e_1, e_2} \widehat{T}_2) = \mathfrak{d}(V)^{-1} F'(\widehat{T}_1) F'(\widehat{T}_2) \quad (28)$$

La proposition suivante détermine quelles relations satisfaites par  $F$  restent valables pour  $F'$  dans le cadre d'une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire enrubannée  $\mathcal{C}$  :

**Proposition 2.26.** *Soit  $\mathfrak{t}$  une trace sur un idéal  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{C}$ . Soient  $\overline{V} = ((V_1, \varepsilon_1), \dots, (V_k, \varepsilon_k))$  et  $\overline{W} = ((W_1, \varepsilon'_1), \dots, (W_l, \varepsilon'_l))$  des objets de  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{\varepsilon}$  avec l'un au moins des  $V_i$  appartenant à  $\mathcal{I}$ . Soit  $T \in \text{Hom}_{\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{\varepsilon}}(\overline{V}, \overline{W})$  tel que  $F(T) = 0$ . Alors*

$$\forall T' \in \text{Hom}_{\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{\varepsilon}}(\overline{W}, \overline{V}), \quad F'(\text{tr}(T \circ T')) = 0$$

où  $\text{tr}(T \circ T') = \widehat{T \circ T'}$  est la trace dans  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}^{\varepsilon}$  de  $T \circ T'$  c'est-à-dire sa fermeture.

DÉMONSTRATION. On peut calculer  $F'$  en coupant  $\widehat{T \circ T'}$  le long de l'arête coloriée par  $V_i$ . Mais la valeur par  $F$  de cette présentation coupée se factorise alors par  $F(T) = 0$  donc  $F'(\widehat{T \circ T'}) = 0$ .  $\square$

Remarquons que la proposition est généralement fausse si aucun des objets  $V_i$  n'est dans  $\mathcal{I}$ . Cette proposition permet d'écrire des relations d'écheveaux pour  $F'$  comme on le fait habituellement pour  $F$ .

L'union disjointe des graphes en rubans dans  $S^3$  est une opération pour laquelle le sous-ensemble  $\mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{I})$  est absorbant :  $\forall T \in \mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{C}), \forall T' \in \mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{I}), T \sqcup T' \in \mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{I})$ . Il découle alors de la définition de  $F'$  que

$$\forall T \in \mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{C}), \forall T' \in \mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{I}), \quad F'(T \sqcup T') = F(T)F'(T') \quad (29)$$

En particulier, comme fonction sur les graphes fermés,  $F$  est déterminée par  $F'$ . Dans cette situation, supposons que  $\mathcal{I}$  soit engendré par un objet simple  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_V \neq \mathcal{C}$ . Alors par la proposition 2.21 appliquée à la trace catégorique sur l'idéal  $\mathcal{I}_{\mathbb{I}} = \mathcal{C}$ , on a  $\text{qdim}(V) = 0$ . Ensuite, par le théorème 2.17, la trace catégorique est nulle sur tout l'idéal  $\mathcal{I}_V$  car sa restriction à  $\text{End}_{\mathcal{C}}(V)$  est nulle.

Finalement, on obtient que  $\forall T' \in \mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{I}), F(T') = 0$ .

Schématiquement, si  $(\mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{I}))^c$  est le complémentaire de  $\mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{I})$  dans  $\mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{C})$ , on a :

$$\mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{C}) = \begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & & \uparrow F' \\ & (\mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{I}))^c & \sqcup & \mathcal{G}_{S^3}(\mathcal{I}) \\ & \downarrow F & & \downarrow F \\ & \mathbb{C} & & 0 \end{array}$$

**3.4. Exemples en théorie des représentations.** Si une catégorie pivotale est semi-simple, son unique idéal à droite non nul est  $\mathcal{I} = \mathcal{C}$  et toute trace à droite sur  $\mathcal{C}$  est proportionnelle à la trace catégorique à droite. Ainsi les exemples pertinents de trace modifiée sur un idéal se situent toujours dans le contexte d'une catégorie non semi-simple.

De très nombreux exemples apparaissant naturellement en théorie des représentations sont étudiés du point de vue de la trace et des objet ambidextres dans [20, 21]. J'en citerai deux ici. Le premier a été le premier exemple de catégorie dans lequel nous avons découvert des objets simples non ambidextres. Le deuxième illustre les applications possibles des traces sur les idéaux en théorie des représentations.

Le premier exemple concerne la catégorie (trivialement) enrubannée des représentations de dimension finie de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  lorsque  $\mathbb{k}$  est la clôture algébrique du corps  $\mathbb{F}_p$  à  $p > 2$  éléments. Cette catégorie est suffisamment bien connue pour pouvoir décrire les idéaux engendrés par les modules simples. On y montrent que les seuls modules ambidextres sont les modules  $V$  tels que  $\mathcal{I}_V = \mathcal{C}$  ou  $\mathcal{I}_V = \text{Proj}$ . Les autres modules simples sont ceux de dimension divisible par  $p$  (leur dimension catégorique est donc nulle dans  $\mathbb{k}$ ) mais qui ne sont pas projectifs. Ils engendrent un idéal sur lequel il n'existe pas de trace non triviale.

La théorie des représentations de poids des super algèbres de Lie simples complexes est moins précisément connue que celle des algèbres de Lie simples complexes. Même les super dimensions des modules simples restent largement mystérieuses. Kac et Wakimoto ([38, Conjecture 3.1]) ont établi une conjecture pour une super algèbre de Lie basique classique  $\mathfrak{g}$ . Ils associent de manière combinatoire à un  $\mathfrak{g}$ -module simple  $V$  un entier  $\text{atyp}(V)$  appelé son degré d'atypicalité. Cet entier varie entre 0 et  $n = \text{atyp}(\mathbb{I})$  où  $\mathbb{I} = \mathbb{C}$  est le module trivial. La conjecture est alors :

$$\text{atyp}(V) = n \iff \text{sdim}(V) \neq 0.$$

Nous avons formulé une généralisation naturelle de cette conjecture avec les dimensions modifiées :

**Conjecture 2.27** (Conjecture de Kac-Wakimoto généralisée).

- (1) *Tous les  $\mathfrak{g}$ -modules simples sont ambidextres.*
- (2) *Si  $V, W$  sont des  $\mathfrak{g}$ -modules simples avec  $V \in \mathcal{I}_W$ , alors*

$$\text{atyp}(V) = \text{atyp}(W) \iff \mathfrak{d}(V) \neq 0.$$

*où  $\mathfrak{d}$  est l'unique (à un scalaire près) fonction dimension modifiée sur  $\mathcal{I}_W$ .*

C'est une généralisation de la conjecture originelle car lorsque  $W = \mathbb{I}$ ,  $\mathcal{I}_W = \mathcal{C}$  et la fonction dimension modifiée n'est autre que la super dimension. Récemment cette conjecture généralisée a été prouvée par Vera Serganova ([59]) pour les super algèbres de Lie  $\mathfrak{gl}(E)$  en même temps que la conjecture originelle. Kujawa a démontré cette conjecture pour les super algèbres de Lie  $\mathfrak{osp}(E)$ .

Cette conjecture généralisée pour  $\mathfrak{gl}(E)$  est à son tour utilisée comme un point clé dans l'étude de la complexité des  $\mathfrak{gl}(E)$ -modules ([8]).





## CHAPITRE 3

# Les applications aux groupes quantiques

### 1. $\mathfrak{sl}(2|1)$ et les super algèbres de type I

Le parti pris dans cette section est de donner quelques indications, pour un lecteur familier à la théorie des algèbres de Lie complexes, sur les raisons permettant d'appliquer les résultats du chapitre précédent au cas des super algèbres de type I.

V.G. Kac a classifié ([36]) les super algèbres de Lie complexes simples de dimension finie. Les plus communes sont dites classiques, c'est-à-dire que leur partie paire  $\mathfrak{g}_0$  est une algèbre de Lie réductible et leur partie impaire  $\mathfrak{g}_1$  est un  $\mathfrak{g}_0$ -module semi-simple ( $\mathfrak{g}$  est de type II si  $\mathfrak{g}_1$  est irréductible, de type I sinon).  $\mathfrak{g}$  est dite basique si elle possède une forme bilinéaire super symétrique invariante non dégénérée (qui n'est pas nécessairement la forme de Killing). Il y a trois familles de super algèbres de Lie basiques classiques de type I. Les deux premières familles sont  $\mathfrak{sl}(m|n)$  ( $\mathbb{C}^{m|n} = \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^n$  est un super  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel) et  $\mathfrak{osp}(2|2n)$  ( $\mathbb{C}^{2|2n} = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^{2n}$  est muni de sa forme quadratique super symétrique standard). Les algèbres de la troisième famille  $\mathfrak{psl}(n|n)$  ont une forme de Killing nulle et nous n'en parlerons pas dans ce qui suit.

Comme pour les algèbres de Lie simples, on choisit une sous algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  (qui est en fait une sous algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_0$ ),  $r = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})$  est le *rang* de  $\mathfrak{g}$ . Une partition de  $\mathfrak{g}$  en deux bords permet de décomposer  $\mathfrak{g}$  en une somme directe de super espaces vectoriels  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ . On définit l'ensemble des racines  $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$  de  $\mathfrak{g}$ , on l'ordonne et on le munit d'une forme bilinéaire symétrique associée à la forme de Killing. L'ensemble des racines se partitionne en  $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^- = \Delta_0^+ \sqcup \Delta_1^+ \sqcup \Delta_0^- \sqcup \Delta_1^-$  selon que les racines sont positives ou négatives puis selon qu'elles correspondent à la partie paire ou impaire de  $\mathfrak{g}$ . Ces données peuvent être codées dans la matrice de Cartan  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{Z})$ , une matrice diagonale entière  $D$  telle que  $D.A$  soit symétrique et un entier  $s \in [1, r]$ . À titre d'exemple, la matrice de Cartan de  $\mathfrak{sl}(2|1)$  est la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D$  est alors la matrice identité et  $s = 2$ .

Soit  $\mathbb{C}[[h]]$  l'anneau des séries formelles en  $h$  muni de la topologie  $h$ -adique et  $q = e^h$  (on utilise la notation  $q^x = e^{xh}$ ). Yamane [71] définit le super groupe quantique  $U_h \mathfrak{g}$  comme la super  $\mathbb{C}[[h]]$ -algèbre de Hopf topologiquement engendrée par les éléments  $h_i, E_i$  et  $F_i$ ,  $i = 1 \cdots r$ , tous pairs sauf  $E_s$  et  $F_s$ , soumis aux relations :

$$\begin{aligned} [h_i, E_j] &= a_{ij} E_j, & [h_i, F_j] &= -a_{ij} F_j, & [h_i, h_j] &= 0, \\ [E_i, F_j] &= \delta_{i,j} \frac{q^{h_i} - q^{-h_i}}{q - q^{-1}}, & E_s^2 &= F_s^2 = 0, \end{aligned}$$

Ainsi que les relations quantiques de type Serre (voir [71, Définition 4.2.1]). Ici  $[\cdot, \cdot]$  est le super commutateur donné par  $[x, y] = xy - (-1)^{ij} yx$  pour des éléments  $x, y$  de parité  $i$  et  $j$  respectivement. Le coproduit, la co-unité et l'antipode sont donnés par

$$\begin{aligned} \Delta E_i &= E_i \otimes 1 + q^{-h_i} \otimes E_i, & \varepsilon(E_i) &= 0 & S(E_i) &= -q^{h_i} E_i \\ \Delta F_i &= F_i \otimes q^{h_i} + 1 \otimes F_i, & \varepsilon(F_i) &= 0 & S(F_i) &= -F_i q^{-h_i} \\ \Delta h_i &= h_i \otimes 1 + 1 \otimes h_i, & \varepsilon(h_i) &= 0 & S(h_i) &= -h_i. \end{aligned}$$

Khoroshkin, Tolstoy [41] et Yamane [71] ont montré que  $U_h\mathfrak{g}$  possède une  $R$ -matrice explicite  $R$  et  $U_h\mathfrak{g}$  a une structure de super algèbre de Hopf enrubannée.

Le quotient  $U_h\mathfrak{g}/h.U_h\mathfrak{g}$  est isomorphe à la super algèbre universelle enveloppante  $U\mathfrak{g}$  de  $\mathfrak{g}$ . Un  $U\mathfrak{g}$ -module de poids est une représentation de  $U\mathfrak{g}$  dans un super espace vectoriel de dimension finie sur lequel les éléments  $h_i$ , pour  $i = 1 \cdots r$ , agissent diagonalement. Un  $U_h\mathfrak{g}$ -module de poids est une représentation de  $U_h\mathfrak{g}$  dans un  $\mathbb{C}[[h]]$ -module  $V$  topologiquement libre de dimension finie tel que  $V/hV$  est une représentation de poids de  $U\mathfrak{g}$ . Notons  $\mathcal{C}_h$  la catégorie paire des représentations de poids de  $U_h\mathfrak{g}$  qui est enrubannée et  $\mathcal{C}$  celle des représentations de poids de  $U\mathfrak{g}$  (qui est trivialement enrubannée).

La théorie des représentations de poids de  $U_h\mathfrak{g}$  est similaire à celle de la super algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Notons  $\mathcal{C}_h$  la catégorie des représentations de poids de  $U_h\mathfrak{g}$  et  $\mathcal{C}$  celle des représentations de poids de  $U\mathfrak{g}$ . Alors on a un foncteur de limite classique  $:\ll \lim_{h \rightarrow 0} \gg: \mathcal{C}_h \rightarrow \mathcal{C}$ .

On identifie  $\mathfrak{h} \simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}.h_i$ , et on dit qu'un vecteur  $v$  d'un module de poids a un poids  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  si  $\forall H \in \mathfrak{h}, H.v = \lambda(H)v$ . Si  $v \neq 0$ , on dit alors que  $\lambda$  est un poids de la représentation. L'ensemble des poids des  $U_h\mathfrak{g}$ -modules de poids s'identifie à  $\Lambda = \mathbb{Z}^{r-1} \times \mathbb{C} \subset \mathfrak{h}^*$ . Les représentations irréductibles  $V_\lambda$  sont indexées par leur plus haut poids qui est un élément  $\lambda = (w, a) \in \mathbb{N}^{r-1} \times \mathbb{C}$ . Pour  $w \in \mathbb{N}^{r-1}$  fixé, il existe un ensemble fini de valeurs de  $a$ , toutes entières, pour lesquelles la représentation  $V_{(w,a)}$  est dite atypique (cf [37]). Pour les autres valeurs de  $a$ , les modules  $V_{(w,a)}$  sont dits typiques et ce sont les objets simples projectifs de la catégorie  $\mathcal{C}$  (et leur version déformée  $V_{(w,a)}^h$  sont les objets simples projectifs de la catégorie  $\mathcal{C}_h$ ).

Dans [22] pour  $\mathfrak{sl}(2|1)$  puis dans [23] pour  $\mathfrak{sl}(m|n)$  et  $\mathfrak{osp}(2, 2n)$ , nous montrons le fait suivant :

**Lemme 3.1.** *Soit  $\lambda = (0, \dots, 0, a) \in \Lambda$  avec  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ . Alors,  $V_\lambda^h \otimes V_\lambda^h$  est une somme directe de modules irréductibles sans multiplicité. En conséquence,  $V_\lambda^h$  est ambidextre.*

DÉMONSTRATION. Nous donnons juste un commentaire sur la preuve de ce lemme. Le caractère et le super caractère d'un  $U_h\mathfrak{g}$ -module de poids  $V$  sont donnés par respectivement  $\text{ch}(V) = \sum_{\mu \in \Lambda} \dim_{\mathbb{C}[[h]]}(V_\mu) e^\mu \in \mathbb{Z}[\Lambda]$  et  $\text{sch}(V) = \sum_{\mu \in \Lambda} \text{sdim}_{\mathbb{C}[[h]]}(V_\mu) e^\mu \in \mathbb{Z}[\Lambda]$  (où  $e^\mu$  désigne l'image de  $\mu \in \Lambda$  dans  $\mathbb{Z}[\Lambda]$  et  $V_\mu$  désigne le sous  $\mathbb{C}[[h]]$ -module des vecteurs de poids  $\mu$ ). On peut voir les fonctions  $\text{ch}$  et  $\text{sch}$  comme des morphismes de l'anneau de Grothendieck de  $\mathcal{C}_h$  vers l'anneau  $\mathbb{Z}[\Lambda]$ . Des formules pour les caractères des représentations irréductibles de  $\mathfrak{g}$  (ou de  $U_h\mathfrak{g}$ ) n'étaient pas connues en général mais elles l'étaient pour les représentations typiques. On utilise ces formules pour montrer la première partie du Lemme. La proposition 2.23 permet ensuite de conclure que  $V_\lambda^h$  est ambidextre.  $\square$

Ainsi, il découle de ce lemme l'existence d'une trace non nulle sur l'idéal des projectifs de  $\mathcal{C}_h$ .

Le deuxième point clé est le calcul explicite du scalaire  $S'(V_\lambda^h, V_\mu^h)$  de la proposition 2.22. On montre qu'en fait ce scalaire est une fonction explicite du super caractère de  $V_\lambda^h$  et du plus haut poids de  $V_\mu^h$ . Ceci permet comme indiqué dans la proposition 2.22 de calculer la fonction dimension modifiée sur les modules typiques. À titre d'exemple, pour  $\mathfrak{sl}(2|1)$  cette fonction est donnée par

$$d(V_{(w,a)}) = \frac{\sinh((w+1)h)}{4 \sinh(h) \sinh(ah) \sinh((a+w+1)h)} \in h^{-2} \mathbb{C}[[h]].$$

Ce calcul avec l'équation (27) permet le calcul de l'invariant  $F'$  du théorème 2.8. Un cas particulier intéressant est celui d'un entrelacs  $L$  dont les  $c$  composantes sont coloriées par les modules typiques  $(w, a_i)$  pour  $w \in \mathbb{N}^{r-1}$  fixé et  $(a_1, \dots, a_c) \in \mathbb{C}^c$ . L'invariant  $F'(L)$  est alors une fonction méromorphe des  $c$  paramètres complexes attachés aux  $c$  composantes de l'entrelacs. Les éventuels pôles de cette fonction proviennent de la dimension modifiée  $d(V_{(w,a)}) = D_w(q, q^a)$  où  $D_w$  est une fonction fraction rationnelle en deux variables. On peut renormaliser la fonction méromorphe avec la matrice

d'entrelacement de  $L$  pour obtenir un polynôme de Laurent à  $c + 1$  variables qui est un invariant de l'entrelacs orienté (indépendant de la structure en bande) :

**Théorème 3.2.** *Soit  $L$  un entrelacs dans  $S^3$  avec  $c$  composantes ordonnées et  $w \in \mathbb{N}^{r-1}$ . Alors il existe un unique invariant multivariable  $M_{\mathfrak{g}}^w(L)$  de la classe d'isotopie de  $L$  tel que*

- (1) *Si  $c = 1$  alors  $M_{\mathfrak{g}}^c(L) \in D_w(q, q_1)\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, q_1^{\pm 1}]$ ,*
- (2) *Si  $c \geq 2$  alors  $M_{\mathfrak{g}}^w(L) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, q_1^{\pm 1}, \dots, q_c^{\pm 1}]$ ,*
- (3) *Si  $L'$  est un entrelacs en bande ayant  $L$  comme entrelacs sous-jacent et dont la  $i^{\text{ème}}$  composante est coloriée par le module typique  $V_{(w, a_i)}^h$ , alors*

$$F'(L') = q^{\mu'} M_{\mathfrak{g}}^c(L)(q, q^{a_1}, \dots, q^{a_c})$$

*où  $\mu'$  est un polynôme homogène de degré 2 de  $\mathbb{Q}[a_1, \dots, a_c]$  qui ne dépend que de  $w$  et de la matrice d'enlacement de  $L'$ .*

Bien sûr les  $c$  variables  $\{q_1, \dots, q_c\}$  sont attachées aux  $c$  composantes de l'entrelacs : le groupe des permutations  $S_c$  agit sur l'ensemble des numérotations des composantes de  $L$  et il permute les variables  $q_1, \dots, q_c$ . L'application  $M_{\mathfrak{g}}^w$  est équivariante pour ces actions.

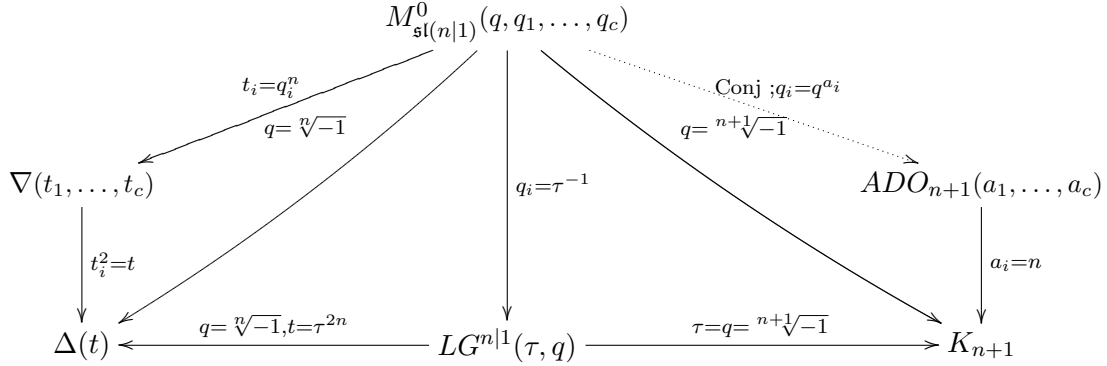
DÉMONSTRATION. La preuve de ce théorème repose sur l'existence de bases « entières » pour les modules typiques  $V_{(w, a_i)}^h$ . Dans ces bases, l'action des générateurs de  $U_h \mathfrak{g}$  s'exprime par des matrices dont les coefficients sont des polynômes de Laurent en  $q$  et  $q^{a_i}$ . Il en est de même, à une constante près, pour l'action de la  $R$ -matrice. La différence des valeurs prises par  $M_{\mathfrak{g}}^c(L)$  lorsque  $L$  est un noeud et lorsque  $L$  est un entrelacs à plusieurs composantes est surprenante. La démonstration en est détournée et j'en donne ici l'idée :

Pour calculer l'invariant  $F'$  sur un entrelacs à au moins deux composantes, on utilise la formule (27). Il faut donc choisir une présentation coupée de l'entrelacs  $T$  en coupant sa  $i^{\text{ème}}$  composante, calculer  $F(T)$  qui est essentiellement un polynôme de Laurent et multiplier par la dimension modifiée de la couleur de la  $i^{\text{ème}}$  composante. Cette dimension modifiée est donnée par  $D_w(q, q^{a_i})$  et est une fraction rationnelle. Mais  $F'$  ne dépend pas du choix de  $T$ . En coupant l'entrelacs sur la première composante de  $L'$  puis sur la deuxième, on obtient

$$M_{\mathfrak{g}}^c(L) \in D_w(q, q_1)\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, q_1^{\pm 1}, \dots, q_c^{\pm 1}] \cap D_w(q, q_2)\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, q_1^{\pm 1}, \dots, q_c^{\pm 1}] \subset \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, q_1^{\pm 1}, \dots, q_c^{\pm 1}].$$

□

On notera aussi la similitude de forme entre  $M_{\mathfrak{g}}^w$  et l'invariant  $\nabla$  d'Alexander-Conway multivariable d'un entrelacs dans  $S^3$  (cf [61]). Des relations entre les fonctions  $M_{\mathfrak{sl}(n|1)}^0$  et les invariants d'autres familles sont établies dans l'article [24]. On y montre que les invariants  $M_{\mathfrak{sl}(n|1)}^0$  sont dominés par les polynômes de HOMFLY-PT d'entrelacs coloriés par les idempotents de l'algèbre de Hecke. Puis on met en évidence un foncteur involutif entre catégories enrubannées se traduisant par l'existence déjà connue d'une dualité rang/niveau pour les catégories modulaires de type  $A$ . Les spécialisations de  $M_{\mathfrak{sl}(n|1)}^0$  aux racines  $n^{\text{ème}}$  et  $n + 1^{\text{ème}}$  de l'unité peuvent, pour un entrelacs à  $c \geq 2$  composantes, être synthétisées par le diagramme suivant :



Ici les flèches correspondent à des égalités d'invariants après spécialisation (et éventuellement renormalisation).  $\Delta$  est le polynôme d'Alexander,  $LG^{n|1}$  est l'invariant de Links-Gould associé à  $\mathfrak{sl}(n|1)$  ([69]) et  $ADO_{n+1}$  est l'invariant d'entrelacs défini par Akutsu, Deguchi et Ohtsuki dans [1]. La flèche en pointillé est une conjecture. Par exemple, la flèche centrale provient de l'égalité

$$LG^{n,1}(\tau, q) = \left( \prod_{i=0}^{n-1} (\tau^{-1}q^i - \tau q^{-i}) \right) M_{\mathfrak{sl}(n|1)}^0(q, \tau^{-1}, \dots, \tau^{-1}).$$

Pour la version en bande de l'invariant  $M_{\mathfrak{sl}(2|1)}^0$ , on décrit un système de relations d'écheveaux permettant un calcul combinatoire de l'invariant. L'invariant  $M_{\mathfrak{sl}(2|1)}^0$  étant une version multivariable de l'invariant de Links-Gould ([45]), ces relations d'écheveaux donnent en particulier une définition axiomatique jusque là inconnue de l'invariant de Links-Gould.

## 2. $U_q\mathfrak{sl}_2$ aux racines de l'unité

Nous commençons par une description de certaines versions du groupe quantique  $U_q\mathfrak{sl}_2$  et de catégories de  $U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules. La sous-section suivante généralise aux autres algèbres de Lie simples en suivant un traitement relativement similaire.

Comme  $\mathbb{k}$ -algèbre, le groupe quantique de Drinfeld-Jimbo  $U_q\mathfrak{sl}_2$  est donné par la présentation :

$$U_q\mathfrak{sl}_2 = \left\langle K^{\pm 1}, E, F \mid KEK^{-1} = q^2E, \quad KFK^{-1} = q^{-2}F, \quad [E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \right\rangle$$

où  $q \in \mathbb{k}$  est inversible ainsi que  $q^2 - 1$ . La structure d'algèbre de Hopf de  $U_q\mathfrak{sl}_2$  est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta(E) &= 1 \otimes E + E \otimes K, & \varepsilon(E) &= 0, & S(E) &= -EK^{-1}, \\ \Delta(F) &= K^{-1} \otimes F + F \otimes 1, & \varepsilon(F) &= 0, & S(F) &= -KF, \\ \Delta(K) &= K \otimes K & \varepsilon(K) &= 1, & S(K) &= K^{-1}, \end{aligned}$$

Je donne une liste non exhaustive de trois versions de cette algèbre de Hopf :

- (1) Soit l'anneau des séries  $\mathbb{C}[[h]]$  muni de la topologie  $h$ -adique et posons  $q = e^h$  et  $K = e^{hH}$ . Nous avons alors la version  $h$ -adique  $U_h\mathfrak{sl}_2$  du groupe quantique dont l'algèbre sous-jacente est équivalente à  $U\mathfrak{sl}_2[[h]]$ . Ainsi, toute représentation complexe de dimension finie de  $\mathfrak{sl}_2$  se déforme en une représentation de  $U_h\mathfrak{sl}_2$ . Ces représentations forment une catégorie semi-simple avec une infinité d'objets simples.  $U_h\mathfrak{sl}_2$  possède une  $R$ -matrice universelle

$$R_h = \exp\left(\frac{h}{2} H \otimes H\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q - q^{-1})^{2n}}{\prod_{k=1}^n (q^k - q^{-k})} E^n \otimes F^n \quad (30)$$

( $R_h$  est un élément de la complétion  $U_h\mathfrak{sl}_2 \widehat{\otimes} U_h\mathfrak{sl}_2$ ) qui induit un tressage sur la catégorie de ses représentations. Cette catégorie est alors enrubannée.

- (2) Si  $q = e^{\frac{2i\pi}{r}} \in \mathbb{k} = \mathbb{C}$  pour un entier  $r \geq 2$ , on obtient une algèbre de Hopf complexe.  $U_q\mathfrak{sl}_2$  contient alors dans son centre une sous-algèbre de Hopf  $Z_0 = \langle K^r, E^r, F^r \rangle$ . Le groupe quantique réduit est le quotient  $\overline{U_q\mathfrak{sl}_2} = U_q\mathfrak{sl}_2 \otimes_{\varepsilon: \mathcal{Z}^0 \rightarrow \mathbb{C}} \mathbb{C}$  qui est une algèbre de Hopf de dimension finie. L'algèbre  $\overline{U_q\mathfrak{sl}_2}$  possède alors  $r$  classes d'isomorphisme de représentations simples de dimension finie. Là encore,  $\overline{U_q\mathfrak{sl}_2}$  possède une  $R$ -matrice universelle qui induit un tressage sur la catégorie de ses représentations. Pour certaines valeurs de  $r$ , un processus de modularisation permet de modifier cette catégorie en une catégorie modulaire. C'est la catégorie de référence pour définir les invariants de Turaev-Viro et de Witten-Reshetikhin-Turaev.
- (3) Toujours dans le cas où  $q = e^{\frac{2i\pi}{r}}$ , la catégorie des  $U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules « de poids » que nous allons définir ci-après, possède une infinité d'objets simples. Elle n'est pas semi-simple mais est  $G^*$ -graduée pour un groupe algébrique  $G^*$ . Parmi les représentations irréductibles, on peut distinguer les nilpotentes sur lesquelles  $E^r = F^r = 0$  qui sont indexées par un nombre complexe non nul. La catégorie n'est pas enrubannée mais elle admet une structure pivotale.

Pour simplifier, limitons nous au cas où  $q = e^{\frac{i\pi}{r}}$ , où  $r$  est un entier plus grand que 2. Il est à noter que plus qu'une racine de l'unité, c'est son logarithme que l'on fixe et que l'on utilise chaque fois que l'on écrit l'expression  $q^x = e^{\frac{i\pi x}{r}}$  où  $x$  est un nombre complexe ou une matrice. Les éléments  $E^r, F^r$  et  $K^r$  sont centraux dans  $U_q\mathfrak{sl}_2$ . Leur coproduit est donné par

$$\Delta(E^r) = 1 \otimes E^r + E^r \otimes K^r \quad , \quad \Delta(F^r) = K^{-r} \otimes F^r + F^r \otimes 1 \quad \text{et} \quad \Delta(K^r) = K^r \otimes K^r,$$

si bien que  $\mathcal{Z}^0 = \langle K^{\pm r}, E^r, F^r \rangle$  est l'algèbre de Hopf des fonctions polynomiales sur le groupe algébrique :

$$G^* = \left\{ M_{k,e,f} = \begin{pmatrix} 1 & e & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f & k^{-1} \end{pmatrix} : (k, e, f) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 \right\}. \quad (31)$$

Le groupe  $G^*$  correspond à celui défini dans l'exemple de la section 4 du chapitre 1 après identification de la matrice  $M_{k,e,f} \in G^*$  et du morphisme d'algèbre de  $\mathcal{Z}^0$  dans  $\mathbb{C}$  envoyant  $K^r$  sur  $k$ ,  $E^r$  sur  $e$ ,  $F^r$  sur  $f$ . Nous disons qu'une représentation  $V$  de  $U_q\mathfrak{sl}_2$  de dimension finie est un module de poids s'il possède une base dans laquelle  $E^r, F^r$  et  $K$ , agissent diagonalement. Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie des modules de poids qui est donc  $G^*$ -graduée.

La structure pivotale de  $U_q\mathfrak{sl}(2)$  est donnée par l'élément  $K^{1-r}$ . On vérifie bien que  $\forall x \in U_q\mathfrak{sl}(2)$ ,  $S^2(x) = KxK^{-1} = K^{1-r}xK^{r-1}$ . Le choix habituel est l'élément  $K$  qui est valable pour toute valeur de  $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$  mais il n'est pas compatible avec le tressage que nous allons définir ci-après.

Un module de  $\mathcal{C}$  est dit nilpotent si  $E$  et  $F$  y agissent comme des endomorphismes nilpotents. Soit  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^*$  le sous-groupe des matrices diagonales de  $G^*$ . Les éléments  $E^r$  et  $F^r$  sont à la fois nilpotents et semi-simples sur tout module nilpotent de  $\mathcal{C}$ . Ils y agissent donc trivialement et l'ensemble des modules nilpotents de  $\mathcal{C}$  forment donc une sous-catégorie pleine

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{t \in \mathbb{C}} \mathcal{C}_t \quad \subset \quad \mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G^*} \mathcal{C}_g$$

La catégorie  $\mathcal{C}$  ne peut être munie d'une structure enrubannée car elle est graduée par un groupe non commutatif. Pour équiper sa sous-catégorie  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$  d'une telle structure, on essaye de donner un

sens dans  $U_q\mathfrak{sl}(2)$  à la  $R$ -matrice universelle  $h$ -adique dont la formule est donnée Équation (30). Pour cela, nous avons introduit le *groupe quantique déroulé*  $U_q^H\mathfrak{sl}(2)$  qui est une extension de  $U_q\mathfrak{sl}(2)$ . Cette algèbre de Hopf est engendrée par les éléments  $K^{\pm 1}, E, F$  soumis aux mêmes relations que dans  $U_q\mathfrak{sl}(2)$ , auxquels on adjoint l'élément primitif  $H$  qui satisfait

$$HK = KH, \quad HK^{-1} = K^{-1}H, \quad [H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F.$$

Une représentation  $V$  de  $U_q^H\mathfrak{sl}_2$  de dimension finie est un module de poids si  $\rho_V(E^r) = \rho_V(F^r) = 0$ , s'il possède une base dans laquelle  $\rho_V(H)$  est diagonal et si de plus  $\rho_V(K) = q^{\rho_V(H)}$ . Soit  $\mathcal{C}^H$  la catégorie des modules poids qui est  $\mathbb{C}$ -graduée.

On a une inclusion d'algèbre de Hopf pivotale  $U_q\mathfrak{sl}(2) \subset U_q^H\mathfrak{sl}(2)$  qui induit un foncteur pivotale gradué de restriction

$$F^H : \mathcal{C}^H \rightarrow \mathcal{C}.$$

Pour un  $U_q^H\mathfrak{sl}(2)$ -module  $V \in \mathcal{C}^H$ ,  $F^H(V)$  est le même espace pour lequel on oublie l'action de  $H$ . On peut montrer que ce foncteur est essentiellement surjectif. Tout module de  $\mathcal{C}^H$  possède sa topologie d'espace vectoriel normé de dimension finie. Pour cette topologie, les exponentielles d'endomorphismes sont bien définies. Ceci permet de définir pour  $V, W \in \mathcal{C}^H$ , l'opérateur

$$c_{V,W} = \tau \circ \rho_V \otimes \rho_W \left( q^{\frac{H \otimes H}{2}} \sum_{n=0}^{r-1} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q - q^{-1})^{2n}}{\prod_{k=1}^n (q^k - q^{-k})} E^n \otimes F^n \right).$$

Ohtsuki ([53, Theorem 4.20]) montre que  $c_{V,W}$  est un tressage compatible avec la structure pivotale. C'est-à-dire que l'élément  $\theta$  défini dans la section 3 du chapitre 1 est un twist.

Pour finir, on s'intéresse à l'idéal des projectifs des catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^H$ . Tout d'abord, un module  $V$  de  $\mathcal{C}^H$  ou de  $\mathcal{C}$  possède un vecteur de plus haut poids (un vecteur non nul dans le noyau de  $\rho_V(E)$ ).

**Proposition 3.3.**

- (1)  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ , il existe à isomorphisme près un unique  $U_q^H\mathfrak{sl}(2)$ -module irréductible  $V_\alpha$  ayant un vecteur  $v$  de plus haut poids  $\alpha + r - 1$  (c'est-à-dire  $E.v = 0$  et  $H.v = (\alpha + r - 1)v$ ).
- (2)  $V_\alpha$  est projectif ssi  $\alpha \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \cup (r\mathbb{Z})$  ssi  $\dim_{\mathbb{C}}(V_\alpha) = r$ . On a alors  $V_\alpha^* \simeq V_{-\alpha}$ .
- (3) Si  $V_\alpha, V_\beta$  sont projectifs et si  $\alpha + \beta \notin \mathbb{Z}$  alors  $V_\alpha \otimes V_\beta \simeq \bigoplus_{k=\frac{1-r}{2}}^{\frac{r-1}{2}} V_{\alpha+\beta+2k}$ .

DÉMONSTRATION. Le premier point est une conséquence de la classification des modules simples nilpotents (voir par exemple [39]). On montre ensuite par des arguments de plus haut poids semblables à ceux de la théorie des algèbres de Lie classiques que si  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $\kappa = q^{r\alpha} \in \mathbb{C}^*$ , et  $t = M_{\kappa,0,0} \in \mathbb{C}$ , alors  $\mathcal{C}_t^H$  est semi-simple. Ceci implique que les modules  $\{V_{\alpha+2k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  qui sont les modules simples de  $\mathcal{C}_t^H$  sont projectifs. Pour les modules de poids entier on peut utiliser le théorème ci-après et la Proposition 2.22.  $\square$

**Théorème 3.4.** *Les modules simples projectifs de  $\mathcal{C}^H$  sont ambidextres. De plus, tout module simple projectif  $V$  de  $\mathcal{C}$  est ambidextre à droite et à gauche et l'on a  $t_V = t_V^\vee$  où  $t$  est l'unique (à un scalaire global près) trace à droite sur Proj.*

DÉMONSTRATION. Pour  $\alpha \in \mathbb{C}$  générique (non rationnel),  $V_\alpha$  satisfait les hypothèses de la proposition 2.23. Il s'ensuit que  $V_\alpha$  est ambidextre et il en est de même pour  $F^H(V_\alpha)$ . Dans [27] on montre que le rapport entre  $t_V$  et  $t_V^\vee$  est un scalaire appelé le « slope ». On montre qu'il est déterminé par un morphisme de groupe  $G^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ . On utilise ensuite la trivialité du slope sur  $\mathbb{C}$  pour en déduire sa trivialité sur  $G^*$  car  $\mathbb{C}$  engendre normalement  $G^*$ .  $\square$

### 3. Les groupes quantiques aux racines de l'unité

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie complexe simple. La théorie des groupes quantiques non restreints aux racines de l'unité [14, 15, 16, 17] établit un lien remarquable. D'un côté, les groupes quantiques  $U_q\mathfrak{g}$  peuvent être vus dans leur version  $h$ -adique ( $q = e^h$ ) comme des déformations de l'algèbre de Hopf  $U\mathfrak{g}$  et de l'autre, lorsque  $q$  est une racine  $r^{\text{ième}}$  impaire de l'unité, ce sont des extensions non commutatives de degré  $d^r$  ( $d$  est la dimension de  $\mathfrak{g}$ ) de l'algèbre  $\mathcal{Z}^0$  des fonctions régulières sur le groupe dual  $G^*$  (voir ci-après). Le groupe quantique  $U_q\mathfrak{g}$  aux racines de l'unité contient  $\mathcal{Z}^0$  dans son centre et la catégorie  $\mathcal{C}$  des  $U_q\mathfrak{g}$ -modules de poids est naturellement  $G^*$ -graduée.  $G^*$  n'étant pas commutatif, les produits tensoriels de modules  $U \otimes V$  et  $V \otimes U$  ne sont généralement pas de même degré et donc non isomorphes. Cependant  $\mathcal{C}$  possède naturellement une structure pivotale.

On munit l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de rang  $n$  et de dimension  $2N + n$  d'une sous algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$ . On fixe un ensemble de racines simples  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , on appelle  $\Delta_+$  l'ensemble des racines positives correspondant et  $A = (A_{ij})_{i,j=1 \dots n}$  la matrice de Cartan associée. Soit  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  avec  $d_i \in \mathbb{N}^*$  la matrice minimale telle que  $DA$  est symétrique définie positive. Le réseau des racines dans  $\mathfrak{h}^*$  est le  $\mathbb{Z}$ -module libre  $L_R$  de base les racines simples. Il lui correspond une unique base  $(H_1, \dots, H_n)$  de  $\mathfrak{h}$  telle que  $\alpha_j(H_i) = a_{ij}$ . La base duale de  $(H_1, \dots, H_n)$  est formée des poids fondamentaux et engendre un  $\mathbb{Z}$ -module  $L_W \supset L_R$  appelé le réseau des poids de  $\mathfrak{h}^*$ . Enfin,  $\mathfrak{h}^*$  est muni de la forme bilinéaire symétrique donnée par  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = d_i a_{ij}$ . Comme d'habitude, on désigne par  $\rho \in L_W$  la demi somme des racines positives.

**3.1. Présentation.** Nous donnons à titre de comparaison la présentation de  $U\mathfrak{g}$  par son système de générateurs de Serre-Chevalley. Comme algèbre de Hopf, l'algèbre enveloppante  $U\mathfrak{g}$  de  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre engendrée par les éléments  $\{H_i, X_i, X_{-i} : i = 1, \dots, n\}$  satisfaisant aux relations ci-après pour  $\sigma = \pm 1$  et  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

$$H_i H_j = H_j H_i, \quad [H_i, X_{\sigma j}] = \sigma a_{ij} X_{\sigma j}, \quad [X_i, X_{-j}] = \delta_{ij} H_i, \quad (32)$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} X_{\sigma i}^k X_{\sigma j} X_{\sigma i}^{1-a_{ij}-k} = 0, \quad \text{si } i \neq j \quad (33)$$

Les  $3n$  générateurs sont primitifs c'est-à-dire que le coproduit d'un générateur  $Y$  est donné par  $\Delta Y = Y \otimes 1 + 1 \otimes Y$ , l'antipode par  $S(Y) = -Y$  et la co-unité par  $\varepsilon(Y) = 0$ .

Soit  $q = e^{2i\pi/r}$  où  $r \geq 3$  est un entier impair. Si  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie exceptionnelle  $\mathfrak{g}_2$ , on suppose de plus que  $r$  n'est pas un multiple de 3. Si  $x \in \mathbb{C}$  et  $k, l \in \mathbb{N}$  on utilise les notations :

$$q^x = e^{2i\pi x/r}, \quad \{x\}_q = q^x - q^{-x}, \quad [x]_q = \frac{\{x\}_q}{\{1\}_q}, \quad [k]_q! = [1]_q [2]_q \cdots [k]_q, \quad \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}_q = \frac{[k]_q!}{[l]_q! [k-l]_q!}.$$

Comme pour  $\mathfrak{sl}(2)$ , nous allons considérer plusieurs versions du groupe quantique de Drinfeld-Jimbo associé à  $\mathfrak{g}$ . Soit  $\mathcal{U} = U_q\mathfrak{g}$  l'algèbre de Hopf ayant pour générateurs  $\{K_\beta, X_i, X_{-i} : i = 1, \dots, n; \beta \in L_W\}$  soumis aux relations

$$K_0 = 1, \quad K_\beta K_\gamma = K_{\beta+\gamma}, \quad K_\beta X_{\sigma i} K_{-\beta} = q^{\sigma \langle \beta, \alpha_i \rangle} X_{\sigma i}, \quad (34)$$

$$[X_i, X_{-j}] = \delta_{ij} \frac{K_{\alpha_i} - K_{\alpha_i}^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad (35)$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} X_{\sigma i}^k X_{\sigma j} X_{\sigma i}^{1-a_{ij}-k} = 0, \quad \text{si } i \neq j \quad (36)$$

où  $\sigma = \pm 1$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $q_i = q^{d_i}$  et  $\beta, \gamma \in L_W$ . Le coproduit  $\Delta$ , la co-unité  $\epsilon$  et l'antipode  $S$  sont définis sur ces générateurs par

$$\begin{aligned}\Delta(X_i) &= 1 \otimes X_i + X_i \otimes K_{\alpha_i}, & \Delta(X_{-i}) &= K_{\alpha_i}^{-1} \otimes X_{-i} + X_{-i} \otimes 1, \\ \Delta(K_\beta) &= K_\beta \otimes K_\beta, & \epsilon(X_i) &= \epsilon(X_{-i}) = 0, & \epsilon(K_{\alpha_i}) &= 1, \\ S(X_i) &= -X_i K_{\alpha_i}^{-1}, & S(X_{-i}) &= -K_{\alpha_i} X_{-i}, & S(K_\beta) &= K_{-\beta}.\end{aligned}$$

Dans la version  $h$ -adique des groupes quantiques, les générateurs  $K_{\alpha_i}$  sont remplacés par leur logarithme  $H_i$  tels que  $K_{\alpha_i} = q_i^{H_i}$  (remarquons que  $q_i^{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle} = q^{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}$ ). Ces derniers sont utilisés pour donner une expression de la  $R$ -matrice universelle du groupe quantique. Comme pour  $\mathfrak{sl}(2)$ , c'est la motivation pour introduire une version « déroulée » de  $U_q \mathfrak{g}$  : Nous appelons *groupe quantique déroulé* l'algèbre de Hopf  $\mathcal{U}^H$  engendrée par les mêmes générateurs que  $\mathcal{U}$  auxquels on adjoint des générateurs  $H_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  soumis aux relations précédentes plus les suivantes

$$[H_i, X_{\epsilon_j}] = \sigma a_{ij} X_{\sigma j}, \quad [H_i, H_j] = [H_i, K_\beta] = 0 \quad (37)$$

où  $\sigma = \pm 1$ . Les applications de structure de  $\mathcal{U}$  s'étendent à  $\mathcal{U}^H$  par

$$\Delta(H_i) = 1 \otimes H_i + H_i \otimes 1, \quad \epsilon(H_i) = 0, \quad S(H_i) = -H_i.$$

Comme espace vectoriel,  $\mathcal{U}^H$  est isomorphe à  $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}$  où  $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}} = S^* \mathfrak{h}$  est l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel  $\mathfrak{h}$ . L'application évidente  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^H$  est un morphisme injectif d'algèbre de Hopf qui permet d'identifier  $\mathcal{U}$  à une sous algèbre de Hopf de  $\mathcal{U}^H$ .

Notons  $\mathcal{U}_+$  (respectivement  $\mathcal{U}_-$ , respectivement  $\mathcal{U}_0$ ) la sous-algèbre de  $\mathcal{U}$  engendrée par les éléments  $\{X_i, i = 1 \dots n\}$  (respectivement  $\{X_{-i}, i = 1 \dots n\}$ , respectivement  $\{K_\beta, \beta \in L_W\}$ ). Il existe une version du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pour  $\mathcal{U}$  qui donne une base des espaces vectoriels sous-jacents aux algèbres  $\mathcal{U}_+$ ,  $\mathcal{U}_-$ ,  $\mathcal{U}_0$  et montre que la multiplication donne un isomorphisme linéaire

$$\mathcal{U}_- \otimes \mathcal{U}_0 \otimes \mathcal{U}_+ \rightarrow \mathcal{U}_- \mathcal{U}_0 \mathcal{U}_+ = \mathcal{U}$$

La catégorie des représentations de  $U_q \mathfrak{g}$  lorsque  $q$  n'est pas une racine de l'unité ressemble beaucoup à celle de  $U \mathfrak{g}$ . Au contraire, pour  $q = \exp(2i\pi/r)$ , la catégorie des représentations de  $\mathcal{U}$  est très particulière et a été étudiée par Kac, De Concini, Processi, Rosso et Reshetikhin. Nous en donnons maintenant quelques aspects.

Soit  $G$  le groupe de Lie complexe, connexe, simplement connexe, associé à  $\mathfrak{g}$ . Le groupe quantique  $U_q \mathfrak{g}$  est une déformation de  $U \mathfrak{g}$  associée à une structure de groupe de Poisson-Lie sur  $G$ . Soit  $G^*$  le groupe Poisson-Lie dual de  $G$ . Comme groupe de Lie,  $G^*$  est isomorphe au noyau de l'application  $B_+ \times B_- \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  où  $B_+$  et  $B_-$  sont les sous groupes de Borel supérieur et inférieur de  $G$ ,  $\mathbb{C} = B_+ \cap B_- = \exp \mathfrak{h}$  est le tore maximal de  $G$ , les applications  $B_\pm \rightarrow \mathbb{C}$  sont les quotients des borels par leur radical unipotent et l'application  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est la multiplication. De Concini, Kac et Processi établissent que le centre  $\mathcal{Z}$  de  $\mathcal{U}$  contient une sous algèbre de Hopf  $\mathcal{Z}^0$  de  $\mathcal{U}$ . Cette algèbre peut être définie par  $\mathcal{Z}^0 = (\mathcal{Z} \cap \mathcal{U}_+)(\mathcal{Z} \cap \mathcal{U}_0)(\mathcal{Z} \cap \mathcal{U}_-)$ . Ils montrent que le groupe  $\text{Hom}_{\text{Alg}}(\mathcal{Z}^0, \mathbb{C})$  est isomorphe au groupe  $G^*$ .

### 3.2. La catégorie des modules de poids.

3.2.1. *Les modules de poids.* Nous disons qu'une représentation  $V$  de  $\mathcal{U}$  de dimension finie est un module de poids s'il possède une base dans laquelle tout élément de  $\mathcal{Z}^0 \cup \mathcal{U}_0$  agit diagonalement. Les duals et les produits tensoriels de modules de poids sont clairement des modules de poids (ceci car  $\mathcal{Z}^0$  et  $\mathcal{U}_0$  sont des sous algèbres de Hopf de  $\mathcal{U}$ ). Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie des modules de poids de  $\mathcal{U}$ .

Pour le groupe quantique déroulé  $\mathcal{U}^H$ , nous appelons module de poids une représentation  $V$  de  $\mathcal{U}$  de dimension finie qui possède une base dans laquelle tout élément de  $\mathcal{Z}^0 \cup \mathcal{U}_{\mathfrak{h}}$  agit diagonalement et telle que tout élément  $K_\beta$  agit sur  $V$  comme  $\rho_V(K_\beta) = \prod_{i=1}^n \exp(\frac{2i\pi}{r} d_i b_i \rho_V(H_i))$  où  $\beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$



(ceci implique en particulier que  $\rho_V(K_{\alpha_i}) = q_i^{\rho_V(H_i)}$ ). Soit  $\mathcal{C}^H$  la catégorie des modules de poids de  $\mathcal{U}^H$ . On a un foncteur monoïdal  $\mathcal{C}^H \rightarrow \mathcal{C}$  associé à l'inclusion  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^H$ .

3.2.2. *Structure pivotale, tressage et graduation.* Les groupes quantiques  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}^H$  satisfont aux hypothèses de la section 2.4 du chapitre 1 :

**Lemme 3.5.** *L'élément  $K_{2(1-r)\rho}$  est une structure pivotale pour  $\mathcal{U}$  et pour  $\mathcal{U}^H$ .*

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier pour chaque générateur  $x$  de l'algèbre que  $S^2(x) = K_{2(1-r)\rho} x K_{2(1-r)\rho}^{-1}$ . Pour ceci, on utilise la propriété suivante de l'élément  $\rho$  : pour toute racine positive  $\alpha$ , on a  $\langle 2\rho, \alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle$ . Ainsi pour  $i = 1 \cdots n$ , on a  $S^2(X_i) = K_{\alpha_i} X_{\pm i} K_{\alpha_i}^{-1} = K_{2\rho} X_{\pm i} K_{2\rho}^{-1} = K_{2(1-r)\rho} X_{\pm i} K_{2(1-r)\rho}^{-1}$  car  $K_{2(1-r)\rho} = K_{2\rho} K_{-2r\rho}$  et  $K_{-2r\rho}$  est central.  $\square$

Remarquons que la structure pivotale choisie ici dépend de la racine de l'unité.

L'exemple de la section 4 du chapitre 1 s'applique aux sous-algèbres de Hopf  $\mathcal{Z}^0 \subset \mathcal{U}$  et  $\mathcal{Z}^0 \cap \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}^H$ . Ainsi,  $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G^*} \mathcal{C}_g$  est  $G^*$ -graduée et  $\mathcal{C}^H = \bigoplus_{t \in \mathbb{C}} \mathcal{C}_t^H$  est  $\mathbb{C}$ -graduée (on a identifié  $G^* \simeq \text{Hom}_{\text{Alg}}(\mathcal{Z}^0, \mathbb{C})$  et  $\mathbb{C} \simeq \text{Hom}_{\text{Alg}}(\mathcal{Z}^0 \cap \mathcal{U}_0, \mathbb{C})$ ). Le groupe  $\mathbb{C}$  s'identifie à un sous-groupe de  $G^*$  en prolongeant un caractère  $t \in \text{Hom}_{\text{Alg}}(\mathcal{Z}^0 \cap \mathcal{U}_0, \mathbb{C})$  par la co-unité sur  $\mathcal{Z}^0 \cap \mathcal{U}_{\pm}$ .

Nous disons qu'un module de poids  $V$  est nilpotent s'il satisfait l'une des deux propositions équivalentes :

- (1)  $\forall x \in \mathcal{U}_+ \cup \mathcal{U}_-, \rho_V(x - \varepsilon(x))$  est nilpotent.
- (2)  $\forall z \in \mathcal{Z} \cap (\mathcal{U}_+ \cup \mathcal{U}_-), \rho_V(z - \varepsilon(z)) = 0$ .

Les  $\mathcal{U}^H$ -modules de poids sont des  $\mathcal{U}$ -modules de poids nilpotents (car tout élément de  $\mathcal{U}_{\pm} \cap \ker \varepsilon$  translacent non trivialement les espaces propres des éléments de  $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}}$  donc est nilpotent). De plus tout  $\mathcal{U}$ -module de poids nilpotent simple appartient à l'une des  $\mathcal{C}_t$  ( $t \in \mathbb{C}$ ) et est isomorphe à l'image d'un  $\mathcal{U}^H$ -module de poids simple de  $\mathcal{C}_t^H$  (non unique).

Dans [27], nous montrons qu'en tronquant la formule donnant la  $R$ -matrice  $h$ -adique, on peut définir un tressage sur la catégorie  $\mathcal{C}^H$ . Nous ne savons pas montrer que ce tressage est compatible avec la structure pivotale mais nous pouvons toujours considérer la sous-catégorie  $\mathcal{C}^{\theta}$  de  $\mathcal{C}^H$  qui est enrubannée (cf Proposition 1.1). En particulier, nous montrons que  $\mathcal{C}^{\theta}$  contient tous les modules simples isomorphes à leur dual et les modules simples de dimension  $r^N$ .

3.2.3. *Semi-simplicité et projectif.* De Concini, Procesi, Reshetikhin et Rosso définissent dans [17] une partie  $\mathcal{X}$  de  $G^*$  appelée le lieu ramifié. L'ensemble  $G^* \setminus \mathcal{X}$  est un ouvert de Zariski dense de  $G^*$ . Ils montrent le résultat suivant :

**Théorème 3.6.** ([14, 15, 16] et [17, Prop. 5.5]). *Pour tout  $g \in G^*$ , les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\mathcal{U} \otimes_{g: \mathcal{Z}^0 \rightarrow \mathbb{C}} \mathbb{C}$  est une algèbre semi-simple.
- (2)  $g \notin \mathcal{X}$ .
- (3)  $\mathcal{C}_g$  contient au moins (et en fait exactement)  $r^N$   $\mathcal{U}$ -modules irréductibles non isomorphes de dimension  $r^N$ .

En particulier pour les modules nilpotents, on peut montrer que si  $t \in \mathbb{C}$  satisfait  $t(K_{\alpha}^r) \neq \pm 1$  pour toute racine positive  $\alpha$ , alors  $t \notin \mathcal{X}$ .

Tout module de poids se scinde en somme directe de modules homogènes pour la graduation. Si  $g \notin \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{C}_g$  est semi-simple et il s'ensuit automatiquement que  $\mathcal{C}_g \subset \text{Proj}$ . De même,  $\mathcal{C}_t^H$  est semi-simple si  $t \notin \mathcal{X}$  et le théorème implique qu'alors,  $\mathcal{C}_t^H = \mathcal{C}_t^{\theta}$ .

3.2.4. *Trace modifiée.* Dans [27] nous montrons le théorème suivant :

**Théorème 3.7.** *Les modules simples projectifs de  $\mathcal{U}^H$  (respectivement de  $\mathcal{U}$ ) sont ambidextres (respectivement ambidextres à gauche et à droite). Ainsi l'idéal des objets projectifs possède une unique trace à droite  $\mathfrak{t}$  (à un scalaire global près) dans les catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^H$ . De plus,  $\forall g \in G^* \setminus \mathcal{X}$ ,  $\forall V \in \mathcal{C}_g$ ,  $\mathfrak{t}_V = \mathfrak{t}_V^\vee$ .*

DÉMONSTRATION. La démonstration de ce théorème dans [27] est technique mais elle est à l'origine du théorème 2.24. Remarquons d'abord que par le théorème 2.17, il suffit de prouver qu'un module simple projectif est ambidextre à droite pour qu'il existe une trace sur  $\text{Proj}$  et donc que tous les modules simples projectifs soient ambidextre. Voici les ingrédients de la preuve pour  $\mathcal{U}^H$ . Soit  $V$  un module simple projectif. On considère le vecteur  $w_+ \in V \otimes V^*$  (qui est le produit tensoriel du vecteur de plus haut poids de  $V$  avec le vecteur de plus haut poids de  $V^*$ ) et son analogue  $w_-$  « de plus bas poids ». On montre que ces vecteurs engendrent un module contenant un vecteur invariant. Ceci signifie avec les notations du théorème 2.24 que  $w_+, w_- \in W_{i_0}$ . Puis des considérations de poids sur  $w_+$  et  $w_-$  impliquent que l'isomorphisme  $(V \otimes V^*)^* \simeq V \otimes V^*$  induit un isomorphisme  $W_{i_0}^* \simeq W_{i_0}$ .  $\square$

Remarquons que restreinte à l'idéal  $\text{Proj}^\theta$  des projectifs de  $\mathcal{C}^\theta$ , la trace à droite  $\mathfrak{t}$  est une trace. La construction du théorème 2.8 produit donc un invariant de graphes en rubans spatiaux  $\mathcal{C}^\theta$ -coloriés. En particulier, on obtient une généralisation pour toute algèbre de Lie simple de l'invariant d'entrelacs ADO ([1]) associé à  $\mathfrak{sl}(2)$ .

## Invariants des 3-variétés

### 1. 6j-symboles et sommes d'états sur les triangulations

La construction de Turaev-Viro donne à partir d'une catégorie modulaire un invariant de 3-variétés fermées présentées par une triangulation (cf [64]). Cette construction ne fait pas intervenir le tressage de la catégorie et a été généralisée pour certaines catégories sphériques par Barrett et Westbury ([2]). Étant donnée une triangulation d'une 3-variété, un état de la triangulation est une coloration de ses arêtes par des classes d'isomorphisme d'objets simples de la catégorie. Pour un état donné, on peut associer à chacun des tétraèdres de la triangulation un 6j-symbole et contracter ces 6j-symboles par les crochets de dualités pour obtenir un scalaire. Turaev et Viro montrent que la somme sur tous les états de ces scalaires pondérés par le produit des dimensions catégoriques des couleurs des arêtes est (à une renormalisation mineure près) un invariant topologique de la 3-variété (indépendant de la triangulation). Le point clé de la démonstration est l'identité de Biedenharn-Elliott pour les 6j-symboles qui correspond au mouvement de Pachner 3-2 pour les triangulations (ce mouvement est une modification locale de la triangulation où deux tétraèdres adjacents le long d'une face (horizontale) sont remplacés par trois tétraèdres ayant une arête (verticale) commune).

Parmi les obstructions à cette construction pour une catégorie enrubannée non modulaire, citons : (1) les poids de la somme d'états sont nuls si les objets ont une dimension catégorique nulle ; (2) les 6j-symboles (symétriques) sont nuls si les objets ont une dimension catégorique nulle (3) le crochet de dualité et l'identité de Biedenharn-Elliott reposent sur la semi-simplicité or  $\mathcal{C}$  n'est pas semi-simple et (4) il existe une infinité de classes d'isomorphisme d'objets simples ce qui produirait une somme d'états infinie.

Kashaev [35] puis Baseilhac et Benedetti [4] ont considéré des invariants de 3-variétés provenant de catégories de représentations de la sous-algèbre de Borel de  $U_q\mathfrak{sl}_2$  pour lesquelles les trois obstructions ci-dessus posent problème. Dans son travail, Kashaev lève les obstructions (1) et (2) en utilisant des graphes plans ouverts qui n'ont pas les symétries du tétraèdre et compense cette lacune par l'introduction de structures supplémentaires sur les triangulations appelées *charges*. Baseilhac et Benedetti étendent cette construction en un « invariant quantique hyperbolique » pour des 3-variétés munies d'un  $PSL(2, \mathbb{C})$ -fibré plat. Cette structure supplémentaire permet de choisir un nombre fini de termes à sommer dans la somme d'états pour contourner la quatrième obstruction. Dans les deux cas, il est nécessaire de considérer des 3-variétés  $M$  contenant un entrelacs non vide  $L$  (qui sert à modifier les poids de la somme) sans quoi la somme d'états s'annule. Nous utilisons dans les sections suivantes des idées en partie analogues pour définir des invariants  $TV(M, L, \rho)$  de triplets (une 3-variété orienté  $M$ , un entrelacs  $L \subset M$ , une représentation du groupe  $\pi_1(M, *)$ ).

#### 1.1. 6j-symboles modifiés.

1.1.1. *Définition.* Les 6j-symboles furent introduits et étudiés en physique théorique par Eugene Wigner en 1940 et Giulio Racah en 1942. En mathématiques, on les voit comme des tenseurs en 4 variables qui codent l'associativité des catégories pivotales semi-simples.

Dans [28] nous nous donnons des hypothèses minimales pour définir des 6j-symboles modifiés. Je donne ici une version simplifiée.

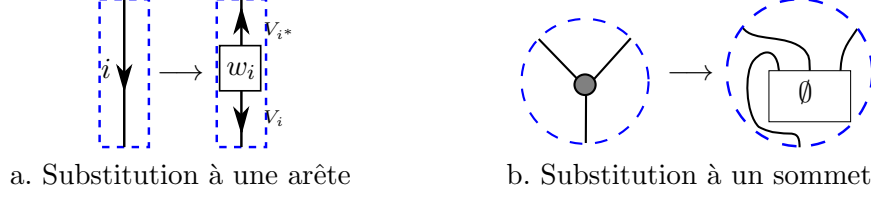


FIGURE 1. Construction d'un graphe en rubans  $\mathcal{C}$ -colorié à partir d'un graphe trivalent  $I$ -colorié.

Soit  $G$  un groupe et  $\mathcal{C}$  une catégorie pivotale  $\mathbb{k}$ -linéaire  $G$ -graduée où  $\mathbb{k}$  est un corps. On fixe un ensemble  $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{-1} \subset G$  tel que  $\forall g \in G \setminus \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{C}_g$  est semi-simple. On suppose l'existence d'une trace à droite  $\mathfrak{t}$  non triviale sur l'idéal  $\text{Proj}$  et on note  $\mathfrak{d}$  la dimension modifiée associée. Soit  $\mathbf{A} = \{V \in \mathcal{C}_g : g \in G \setminus \mathcal{X}, V \text{ est simple}\}$  et supposons aussi que  $\forall V \in \mathbf{A}$ ,  $\mathfrak{d}(V) = \mathfrak{d}(V^*)$ . On obtient d'après la proposition 2.21 que pour tout  $g \in G \setminus \mathcal{X}$  et pour tout module simple  $V \in \mathcal{C}_g$ ,  $\mathfrak{d}(V) \neq 0$  car  $\mathcal{I}_V = \text{Proj}$ .

On commence par définir un invariant de graphes trivalents sphériques. Pour cela, on se munit de *données basiques* qui consistent en un choix de représentants des classes d'isomorphisme des objets de  $\mathcal{C}$  et d'isomorphismes entre ces objets et leur dual :

**Définition 4.1.** Une donnée basique  $(\{(V_i, w_i)\}_{i \in I})$  pour  $(\mathcal{C}, G, \mathcal{X})$  est une famille  $\{V_i\}_{i \in I}$  de représentants des classes d'isomorphisme des objets de  $\mathbf{A}$ , indexée par les éléments d'un ensemble  $I$ . Cet ensemble est muni d'une involution  $i \mapsto i^*$  et  $\forall i \in I$ ,  $w_i : V_i \rightarrow V_{i^*}$  est un isomorphisme tel que

$$\overrightarrow{\text{ev}}_{V_i}(w_i^* \otimes \text{Id}_{V_i}) = \overleftarrow{\text{ev}}_{V_{i^*}}(\text{Id}_{V_{i^*}} \otimes w_i) : V_{i^*} \otimes V_i \rightarrow \mathbb{I} \quad (38)$$

**Remarque 4.2.** Il ne peut y avoir une obstruction à l'existence des morphismes  $w_i$  que pour des objets  $V_i$  qui sont isomorphes à leur dual. En particulier si  $V_i \in \mathcal{C}_g$  avec  $g^2 \neq 1$ , alors  $i^* \neq i$  et l'on peut choisir arbitrairement  $w_i$ , le choix de l'isomorphisme  $w_{i^*}$  est alors imposé par l'équation (38).

On fixe dorénavant une donnée basique. L'ensemble  $I$  se partitionne alors en  $I = \bigsqcup_{g \in G \setminus \mathcal{X}} I_g$  où  $I_g = \{i \in I : V_i \in \mathcal{C}_g\}$ .

pour tous  $i, j, k \in I$ , on pose

$$H^{ijk} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{I}, V_i \otimes V_j \otimes V_k).$$

Les  $\mathbb{k}$ -modules  $H^{ijk}, H^{jki}, H^{kij}$  sont canoniquement isomorphes via les isomorphismes

$$\sigma^{ijk} : H^{ijk} \rightarrow H^{jki} \\ x \mapsto \overrightarrow{\text{ev}}_{V_i} \circ (\text{Id}_{V_{i^*}} \otimes x \otimes \text{Id}_{V_i}) \circ \overleftarrow{\text{coev}}_{V_i} \quad \text{qui satisfont } \sigma^{kij} \sigma^{jki} \sigma^{ijk} = \text{Id}_{H^{ijk}}.$$

Par identification de ces trois modules le long de ces isomorphismes, on obtient le *module de multiplicité symétrisé*  $H(i, j, k)$  (que l'on peut penser comme un coupon circulaire).

Un *graphe trivalent  $I$ -colorié* est un graphe trivalent fini plongé dans  $S^2$  avec la donnée pour chaque arête d'une orientation et d'un label élément de  $I$ . Si  $\Gamma$  est un graphe trivalent  $I$ -colorié, on l'épaissit dans  $S^2$  en un graphe en rubans  $\mathcal{C}$ -colorié  $\Gamma'$  dont certains coupons sont vides : On décompose d'abord un voisinage tubulaire de  $\Gamma$  en bandes et disques correspondant respectivement aux arêtes et sommets de  $\Gamma$ . Ensuite, on applique dans chaque bande et chaque disque la substitution décrite dans la figure 1. À chaque sommet  $v$  de  $\Gamma$ , un choix est fait pour positionner les arêtes issues de  $v$  sur le coupon qui lui est substitué. Cependant le coupon obtenu est appelé à être rempli par un morphisme d'un module de multiplicité symétrisé  $H(v)$  indépendant de ce choix. On note  $H(\Gamma) = \bigotimes_v H(v)$  le produit tensoriel non ordonné de ces modules de multiplicité. Si  $\bigotimes_v \alpha_v \in H(\Gamma)$ , on peut remplir les coupons du graphe  $\Gamma'$  par les morphismes  $\alpha_v$  pour obtenir un vrai graphe en rubans  $\mathcal{C}$ -colorié  $\Gamma'((\alpha_v)_v)$ . On a alors

**Proposition 4.3.** *L'application  $F'$  du théorème 2.12 induit une application bien définie sur l'ensemble des graphes trivalents  $I$ -coloriés, toujours notée  $F'$  :*

$$F' : \Gamma \mapsto F'(\Gamma) \in H(\Gamma)^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(H(\Gamma), \mathbb{k})$$

définie par  $F'(\Gamma)(\otimes_v \alpha_v) = F'(\Gamma'((\alpha_v)_v))$ .

De plus, si  $\Gamma_2$  est obtenu à partir de  $\Gamma_1$  en changeant l'orientation d'une de ses arêtes et en remplaçant son label  $i$  par  $i^*$ , alors  $H(\Gamma_1) = H(\Gamma_2)$  et  $F'(\Gamma_1) = F'(\Gamma_2)$ .

La relative indépendance aux orientations des arêtes énoncée dans cette proposition est en fait une conséquence de l'équation (38). Le reste découle du fait que  $\mathcal{C}$  est pivotale et du théorème 2.12.

Deux graphes trivalents jouent un rôle particulièrement important : le graphe  $\Theta$  et le 1-squelette du tétraèdre :

**Définition 4.4.** *Soient  $i, j, k, l, m, n \in I$ , alors on définit la forme bilinéaire*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{ijk} = F' \left( \begin{array}{c} \text{---} k \text{---} \\ \circ \quad \text{---} j \text{---} \quad \circ \\ \text{---} i \text{---} \end{array} \right) : H(i, j, k) \otimes_{\mathbb{k}} H(k^*, j^*, i^*) \rightarrow \mathbb{k}$$

et le 6j-symbole modifié

$$\left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ l & m & n \end{array} \right| = F' \left( \begin{array}{c} \text{---} n \text{---} \\ \circ \quad \text{---} j \text{---} \quad \circ \\ \text{---} i \text{---} \\ \circ \quad \text{---} k \text{---} \quad \circ \\ \text{---} l \text{---} \end{array} \right) : H(i, j, k^*) \otimes_{\mathbb{k}} H(k, l, m^*) \otimes_{\mathbb{k}} H(n, l^*, j^*) \otimes_{\mathbb{k}} H(m, n^*, i^*) \rightarrow \mathbb{k}.$$

1.1.2. *Propriétés.* Les formes bilinéaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{ijk}$  (aussi appelées 3j-symboles) mettent en dualité les espaces de multiplicité symétrisés :

**Proposition 4.5.** *Soient  $i, j, k \in I$ , alors le couplage  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{ijk} : H(i, j, k) \otimes_{\mathbb{k}} H(k^*, j^*, i^*) \rightarrow \mathbb{k}$  est non dégénéré et induit un isomorphisme  $H(k^*, j^*, i^*) \cong H(i, j, k)^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(H(i, j, k), \mathbb{k})$ .*

Nous donnons ici une démonstration pour souligner comment la semi-simplicité implique la non-dégénérescence d'un couplage entre morphismes.

DÉMONSTRATION. Soient  $g_i, g_j, g_k \in G \setminus \mathcal{X}$  tels que  $V_i \in \mathcal{C}_{g_i}$ ,  $V_j \in \mathcal{C}_{g_j}$  et  $V_k \in \mathcal{C}_{g_k}$ . Tout d'abord on identifie  $H^{ijk} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V_{k^*}, V_i \otimes V_j)$  via l'isomorphisme  $x \mapsto (\overrightarrow{\text{ev}}_{V_k} \otimes \text{Id}_{V_i \otimes V_j}) \circ (w_k^{-1} \otimes x)$  et de manière similaire  $H^{k^*j^*i^*} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V_i \otimes V_j, V_{k^*})$ . La  $G$ -graduation de  $\mathcal{C}$  implique que  $H^{ijk} = H^{k^*j^*i^*} = \{0\}$  si  $g_i g_j g_k \neq 1$ . Dans le cas contraire,  $V_i \otimes V_j \in \mathcal{C}_{g_k^{-1}}$  qui est semi-simple. On peut donc décomposer  $V_i \otimes V_j$  comme une somme directe d'objets simples  $\{W_n\}$  et écrire  $\text{Id}_{V_i \otimes V_j} = \sum_{n=1}^N f_n \circ g_n$  avec  $f_n : W_n \rightarrow V_i \otimes V_j$ ,  $g_n : V_i \otimes V_j \rightarrow W_n$ ,  $g_n \circ f_n = \delta_n^1 \text{Id}_{W_n}$ . Quitte à réordonner les  $W_n$  et à composer  $f_n$  et  $g_n$  par des isomorphismes inverses l'un de l'autre, on peut supposer que pour  $n = 1 \cdots m$ ,  $W_n = V_{k^*}$  et pour  $n > m$ ,  $W_n$  est un objet simple non isomorphe à  $V_{k^*}$ . Si  $f$  est un endomorphisme d'un objet simple de  $\mathcal{C}$ , c'est un endomorphisme scalaire et nous désignerons par  $\langle f \rangle \in \mathbb{k}$  ce scalaire. Ainsi si  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V_{k^*}, V_i \otimes V_j)$ , on a

$$\alpha = \sum_{n=1}^N f_n \circ g_n \circ \alpha = \sum_{n=1}^m f_n \circ g_n \circ \alpha = \sum_{n=1}^m \langle g_n \circ \alpha \rangle f_n$$

(la deuxième égalité provient de  $g_n \circ \alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V_{k^*}, W_n) = \{0\}$  si  $n > m$ ). De manière similaire,  $\beta = \sum_{n=1}^m \langle \beta \circ f_n \rangle g_n$ . Donc  $(f_n)_{n=1 \dots m}$  et  $(g_n)_{n=1 \dots m}$  fournissent des bases de  $H^{ijk}$  et de  $H^{k^*j^*i^*}$ . Le coefficient de la  $n^{\text{ième}}$  ligne et de la  $n^{\text{ième}}$  colonne de la matrice de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{ijk}$  dans ces bases est donné par  $\mathbf{t}(g_n \circ f_{n'}) = \delta_n^{n'} \mathbf{t}(\text{Id}_{V_{k^*}}) = \delta_n^{n'} \mathbf{d}(V_{k^*})$ . Ainsi, cette matrice est scalaire inversible.  $\square$

Les symétries du graphe  $\Theta$  impliquent non seulement que ce couplage est compatible avec les isomorphismes définissant les modules de multiplicité symétrisés mais impliquent aussi que  $\langle x, y \rangle_{ijk} = \langle y, x \rangle_{k^*j^*i^*}$  pour tout  $(x, y) \in H(i, j, k) \times H(k^*, j^*, i^*)$ . On utilise ces formes pour contracter un produit tensoriel de  $\mathbb{k}$ -modules parmi lesquels se trouve une paire  $H(i, j, k), H(k^*, j^*, i^*)$  en dualité. Cette opération est appelée la contraction le long de  $H(i, j, k)$  et est notée  $*_{ijk}$ . Par exemple un élément  $x \otimes y \otimes z \in H(i, j, k) \otimes_{\mathbb{k}} H(k^*, j^*, i^*) \otimes_{\mathbb{k}} H$  se contracte en  $*_{ijk} x \otimes y \otimes z = \langle x, y \rangle_{ijk} z \in H$ .

Les 6j-symboles modifiés ont les symétries du tétraèdre orienté. En particulier,

$$\left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ l & m & n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} j & k^* & i^* \\ m & n & l \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} k & l & m \\ n^* & i & j^* \end{array} \right|.$$

Ces égalités sont satisfaites car les graphes trivalents  $I$ -coloriés définissant ces 6j-symboles sont reliés par des isotopies et des changements d'orientation d'arêtes comme décrits ci-dessus.

Nous montrons alors que les 6j-symboles modifiés satisfont des relations analogues à celles vérifiées par les 6j-symboles dans une catégorie modulaire (Ces derniers sont définis de manière analogue en remplaçant  $F'$  par  $F$ ). Il y a cependant deux grandes différences : premièrement la dimension quantique qui apparaît dans ces relations est remplacée par la dimension modifiée et deuxièmement, certaines restrictions apparaissent liées au fait que  $\mathcal{C}_g$  n'est à priori pas semi-simple lorsque  $g \in \mathcal{X}$ . Dans [28] nous démontrons les propositions suivantes :

**Théorème 4.6** (L'identité de Biedenharn-Elliott). *Soient  $j_0, j_1, \dots, j_8 \in I$  avec  $j_i \in I_{g_i}$  et  $g_2 g_3 \notin \mathcal{X}$ , alors*

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in I_{g_2 g_3}} \mathbf{d}(V_j) *_{j_2 j_3 j^*} *_{j_4 j_7^*} *_{j_1 j j_6^*} \left( \left| \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_5 \\ j_3 & j_6 & j \end{array} \right| \otimes \left| \begin{array}{ccc} j_1 & j & j_6 \\ j_4 & j_0 & j_7 \end{array} \right| \otimes \left| \begin{array}{ccc} j_2 & j_3 & j \\ j_4 & j_7 & j_8 \end{array} \right| \right) \\ & = *_{j_5 j_8 j_0^*} \left( \left| \begin{array}{ccc} j_5 & j_3 & j_6 \\ j_4 & j_0 & j_8 \end{array} \right| \otimes \left| \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_5 \\ j_8 & j_0 & j_7 \end{array} \right| \right). \end{aligned} \quad (39)$$

ici les deux termes de l'égalité appartiennent à

$$H(j_6, j_3^*, j_5^*) \otimes_{\mathbb{k}} H(j_5, j_2^*, j_1^*) \otimes_{\mathbb{k}} H(j_0, j_4^*, j_6^*) \otimes_{\mathbb{k}} H(j_1, j_7, j_0^*) \otimes_{\mathbb{k}} H(j_2, j_8, j_7^*) \otimes_{\mathbb{k}} H(j_3, j_4, j_8^*).$$

La démonstration (voir théorème 1.1.6 de [27] et théorème 7 de [29]) repose sur l'équation du pentagone satisfaite par le produit tensoriel de  $\mathcal{C}$ .

**Théorème 4.7** (La relation d'orthonormalité). *Soient  $i, j, k, l, m, p \in I$  avec  $j \in I_g, l \in I_h$  et  $gh \notin \mathcal{X}$ , alors*

$$\begin{aligned} & \mathbf{d}(V_k) \sum_{n \in I_{gh}} \mathbf{d}(V_n) *_{inm^*} *_{jln^*} \left( \left| \begin{array}{ccc} i & j & p \\ l & m & n \end{array} \right| \otimes \left| \begin{array}{ccc} k & j^* & i \\ n & m & l \end{array} \right| \right) \\ & = \delta_p^k \text{Id}(i, j, k^*) \text{Id}(k, l, m^*), \end{aligned}$$

où  $\delta_p^k$  est le symbole de Kronecker et  $\text{Id}(a, b, c)$  est l'élément canonique de  $H(a, b, c) \otimes_{\mathbb{k}} H(c^*, b^*, a^*)$  déterminé par la dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{abc}$ .

Ici encore, je renvoie à [27] et au théorème 9 de [29] pour la démonstration.

**1.2. Calculs explicites pour  $sl_2$ .** Dans [26], nous calculons des relations « skeins » satisfaites par l'invariant  $F'$  pour la catégorie  $\mathcal{C}^H$  des représentations du groupe quantique déroulé  $\mathcal{U}^H$  associé à  $sl_2$ . À l'aide de ces relations nous sommes en mesure de donner des formules explicites pour les 6j-symboles. Il est à noter que les modules de multiplicité symétriques sont dans ce cas unidimensionnels si bien qu'en leur choisissant une base, les 6j-symboles se réduisent aux scalaires obtenus en les évaluant sur ces bases. Pour toute cette section, on fixe la racine  $q = e^{i\pi/r}$  où  $r \geq 3$  est un entier impair. Nous nous limitons dans [26] au cas de ces racines de l'unité. Ce travail peut être généralisé et il convient de signaler que Jun Murakami et Francesco Costantino ([12]) ont par la suite calculé par d'autres procédés les 6j-symboles pour toute racine d'ordre pair supérieur ou égal à 4.

Je commence par décrire rapidement les modules simples projectifs de cette catégorie qui sont ambidextres. Un tel module a un vecteur de plus haut poids  $v_0$  qui est dans le noyau de l'action de  $E$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $H.v_0 = (\alpha + r - 1)v_0$ . Si on suppose  $\alpha \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \cup r\mathbb{Z}$ , et si on pose  $v_i = F^i.v_0$  pour  $i = 1 \cdots r - 1$ , on obtient une base de ce module que l'on appelle  $V_\alpha$ . Les relations dans  $\mathcal{U}^H$  imposent les actions de  $E$  et  $H$  dans cette base : pour  $i = 1 \cdots r - 1$ , on a

$$H.v_i = (\alpha + r - 1 - 2i)v_i, \quad E.v_i = \frac{\{i\}\{i - \alpha\}}{\{1\}^2}v_{i-1}, \quad F.v_{r-1} = 0.$$

Ce choix d'index pour les modules  $V_\alpha$  permet d'avoir  $V_\alpha^* \simeq V_{-\alpha}$ . La graduation de  $\mathcal{C}^H$  est donnée par l'action de  $K^r$  qui pour un module simple est un scalaire dans  $(\mathbb{C}^*, \times) \cong (\mathbb{C}/2\mathbb{Z}, +)$ . Ainsi, si  $\bar{\alpha}$  est la classe de  $\alpha \in \mathbb{C}$  modulo  $2\mathbb{Z}$ , on a

$$V_\alpha \in \mathcal{C}_{\bar{\alpha}}^H = \{V \in \mathcal{C}^H : \rho_V(K^r) = q^{r\bar{\alpha}} \text{Id}_V\}.$$

La catégorie  $\mathcal{C}_{\bar{\alpha}}^H$  est semi-simple si et seulement si  $\bar{\alpha} \notin \mathcal{X} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset G = (\mathbb{C}/2\mathbb{Z}, +)$  et ses modules simples sont isomorphes aux éléments de  $\{V_\alpha : \alpha \in \bar{\alpha}\}$ . Ces modules sont simples projectifs et leur dimension modifiée est donné par

$$d(V_\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha/r)}{\sin(\pi\alpha)}$$

On décrit des bases des modules de multiplicité et une donnée basique  $\{w_\alpha : V_\alpha \rightarrow V_{-\alpha}^*\}$  qui ont la propriété, dans les bases formées par les vecteurs  $v_i$ , de s'exprimer comme des matrices dont les coefficients sont des polynômes de Laurent en les variables  $q, q^\alpha$ . Parmi les modules de multiplicité non nuls, nous avons d'après la proposition 3.3 (3), pour  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  avec  $\alpha + \beta + \gamma = 2k \in \{1 - r, 3 - r, \dots, r - 1\}$ ,  $H(\alpha, \beta, \gamma) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V_{-\gamma}, V_\alpha \otimes V_\beta) \cong \mathbb{C}$ . On appelle l'entier  $k$  la *hauteur* de  $H(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Étant donné un graphe en rubans trivalent plongé dans  $S^3$ ,  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ -colorié on peut construire comme dans la sous-section 1.1.1 un graphe en rubans  $\mathcal{C}^H$ -colorié dans  $S^3$  avec des coupons vides. En remplissant les coupons par les vecteurs de base des modules de multiplicité symétriques, on obtient un scalaire qui est un invariant noté  $N$  du graphe en rubans  $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ -colorié. Le  $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$ -coloriage des arêtes peut être vu comme une 1-chaîne simpliciale à coefficients complexes. Son bord est une 0-chaîne, c'est-à-dire une fonction de l'ensemble des sommets du graphe vers  $\mathbb{C}$  obtenue en sommant algébriquement les couleurs des arêtes adjacentes à ce sommet. on appelle *hauteur du graphe* la moitié de cette 0-chaîne. Si la hauteur du graphe prend sur un sommet une valeur qui n'appartient pas à  $\{\frac{1-r}{2}, \frac{3-r}{2}, \dots, \frac{r-1}{2}\}$ , il lui correspond un module de multiplicité nul et l'invariant  $N$  du graphe est nul. On peut remarquer que la hauteur d'un graphe étant un bord, la somme de ses valeurs est toujours nulle.

On montre que  $N$  satisfait les relations d'écheveaux suivantes :

- (1) Si  $e$  est une arête de  $T$  coloriée par  $\alpha$  et si  $T'$  est obtenu à partir de  $T$  en inversant l'orientation de  $e$  et en changeant sa couleur en  $-\alpha$ , alors  $N(T') = N(T)$ . Graphiquement,

on obtient

$$\mathbf{N} \left( \begin{array}{c} | \\ \alpha \downarrow \\ | \end{array} \right) = \mathbf{N} \left( \begin{array}{c} | \\ -\alpha \uparrow \\ | \end{array} \right). \quad (\text{N a})$$

(2)  $\mathbf{N}$  s'annule sur les graphes scindés (dont le complémentaire dans  $S^3$  contient une sphère essentielle) :  $\mathbf{N}(T \sqcup T') = 0$ .

(3) Si  $T''$  est la somme connexe de  $T$  et  $T'$  le long d'une arête colorié par  $\alpha$ , alors  $\mathbf{N}(T'') = d(V_\alpha)^{-1} \mathbf{N}(T) \mathbf{N}(T')$  :

$$\mathbf{N} \left( \begin{array}{c} \boxed{T} \xrightarrow{\alpha} \boxed{T'} \\ \boxed{T} \xleftarrow{\beta} \boxed{T'} \end{array} \right) = \delta_\alpha^\beta d(V_\alpha)^{-1} \mathbf{N} \left( \begin{array}{c} \boxed{T} \\ \curvearrowright \end{array} \right) \mathbf{N} \left( \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \boxed{T'} \end{array} \right). \quad (\text{N b})$$

(4) Si  $T''$  est la somme connexe de  $T$  et  $T'$  le long d'un sommet dont les arêtes incidentes sont compatibles, alors  $\mathbf{N}(T'') = \mathbf{N}(T) \mathbf{N}(T')$  :

$$\mathbf{N} \left( \begin{array}{c} \boxed{T} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \boxed{T'} \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \end{array} \right) = \mathbf{N} \left( \begin{array}{c} \boxed{T} \\ \bullet \end{array} \right) \mathbf{N} \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \boxed{T'} \end{array} \right). \quad (\text{N c})$$

(5)  $\mathbf{N}$  a les normalisations suivantes :

$$\mathbf{N} \left( \begin{array}{c} \circ \\ \uparrow \end{array} \right) = d(V_\alpha), \quad \mathbf{N} \left( \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} \right) = 1, \quad \mathbf{N} \left( \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \end{array} \right) = 0, \quad (\text{N d})$$

ici le graphe "Θ" est supposé colorié de sorte que sa hauteur prenne des valeurs dans  $\{\frac{1-r}{2}, \frac{3-r}{2}, \dots, \frac{r-1}{2}\}$ .

(6) Action du twist et du tressage :

$$\mathbf{N} \left( \begin{array}{c} \circ \\ \alpha \downarrow \end{array} \right) = q^{\frac{\alpha^2 - (r-1)^2}{2}} \mathbf{N} \left( \begin{array}{c} | \\ \alpha \downarrow \\ | \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{N} \left( \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \circ \\ \downarrow \gamma \end{array} \right) = q^{\frac{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 + (r-1)^2}{4}} \mathbf{N} \left( \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \bullet \\ \downarrow \gamma \end{array} \right), \quad (\text{N e})$$

(7) Relation de fusion pour  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  :

$$\mathbf{N} \left( \begin{array}{c} | \\ \alpha \downarrow \beta \downarrow \\ | \end{array} \right) = \sum_{\gamma \in \alpha + \beta + \{1-r, 3-r, \dots, r-1\}} d(V_\gamma) \mathbf{N} \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \gamma \downarrow \\ \bullet \end{array} \right), \quad (\text{N f})$$

(8) Relations aux 6j-symboles si  $j_1, j_2, j_3, j_4, j_6, j_1 + j_6 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  :

$$\mathbf{N} \left( \begin{array}{c} j_2 \quad j_4 \\ \bullet \\ j_3 \\ \bullet \\ j_1 \quad j_5 \end{array} \right) = \sum_{j_6 \in j_1 + j_6 + \{1-r, 3-r, \dots, r-1\}} d(V_{j_6}) \left| \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right| \mathbf{N} \left( \begin{array}{c} j_2 \quad j_4 \\ \bullet \\ j_6 \\ \bullet \\ j_1 \quad j_5 \end{array} \right). \quad (\text{N g})$$

Et l'on montre que ces 6j-symboles numériques sont donnés par des polynômes de Laurent en 3 variables  $J_{i_1, i_2, i_3}$  indexés par leur hauteur :

$$\left| \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right| = J_{i_1, i_2, i_3}(q^{j_1}, q^{-j_2}, q^{-j_6}) \quad \text{où} \quad \begin{cases} i_1 = (j_6 - j_2 - j_4)/2 \\ i_2 = (j_5 - j_1 - j_6)/2 \\ i_3 = (j_1 + j_2 - j_3)/2 \end{cases}$$

On utilise les notations  $(X; N)! = \prod_{i=0}^{N-1} (q^i X - q^{-i} X^{-1})$ ,  $\bar{q}_i = q_i^{-1}$  pour donner les formules donnant ces polynômes :

• Si  $i_1, i_2, i_3, i_1 + i_2 + i_3$  ne sont pas tous des entiers compris entre  $\frac{1-r}{2}$  et  $\frac{r-1}{2}$ , le polynôme  $J_{i_1, i_2, i_3}$



est nul. Sinon :

- Si  $i_1, i_3 \leq i_1 + i_2 + i_3$ , soit  $N = \frac{r-1}{2} - i_1 - i_2 - i_3$  et alors

$$\begin{aligned} J_{i_1, i_2, i_3}(q_1, q_2, q_3) &= C_{i_1, i_2, i_3} \left( q_1 q^{-i_3 - \frac{r-1}{2}}; i_2 + i_3 \right)! \left( q_3 q^{-i_2 - \frac{r-1}{2}}; i_1 + i_2 \right)! \times \\ &\quad \left( \sum_{n=0}^N \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}_q \left( q_2 \bar{q}_1 q^{i_3 + \frac{r-1}{2} + 1}; N - n \right)! \left( q_2 \bar{q}_3 q^{i_3 + i_2 - i_1 - \frac{r-1}{2}}; N - n \right)! \times \right. \\ &\quad \left. \left( q_1 \bar{q}_2 q^{-2i_3 - N}; n \right)! \left( q_3 \bar{q}_2 q^{i_1 + \frac{r-1}{2} + 1}; n \right)! \left( q_2 q^{-i_1 - \frac{r-1}{2} - n}; \frac{r-1}{2} - i_2 \right)! \right). \end{aligned} \quad (41)$$

$$\text{où } C_{i_1, i_2, i_3} = \frac{\{r-1\}!}{\left\{ \frac{r-1}{2} - i_1 \right\}! \left\{ \frac{r-1}{2} - i_2 \right\}! \left\{ \frac{r-1}{2} - i_3 \right\}!}$$

- Si  $i_2, i_3 \geq i_1 + i_2 + i_3$ , soit  $N = \frac{r-1}{2} + i_1 + i_2 + i_3$  et alors

$$\begin{aligned} J_{i_1, i_2, i_3}(q_1, q_2, q_3) &= \frac{\left( q_3 \bar{q}_1 q^{N-2i_2+1}; \frac{r-1}{2} + i_2 - N \right)! \left( \sum_{n=0}^N \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}_q \left( q_2 q^{-i_1 + \frac{r-1}{2} + 1}; n \right)! \times \right. \\ &\quad \left. \left( q_2 q^{-i_1 - i_2 + n + 1}; N - n \right)! \left( q_1 \bar{q}_2 q^{N-n-2i_3+1}; \frac{r-1}{2} + i_3 \right)! \left( q_2 \bar{q}_3 q^{n-2i_1+1}; \frac{r-1}{2} + i_1 \right)! \right). \end{aligned} \quad (42)$$

- Compte tenu des symétries des 6j-symboles, les valeurs des polynômes  $J_{i_1, i_2, i_3}$  pour les autres valeurs de  $(i_1, i_2, i_3)$  sont obtenues par les équations suivantes

$$J_{i_1, i_2, i_3}(q_1, q_2, q_3) = J_{i_2, i_1, i_3}(\bar{q}_2, \bar{q}_1, \bar{q}_3) = J_{i_2, i_3, i_4}(q_1 \bar{q}_2 q^{-2i_3}, q_1 \bar{q}_3 q^{2i_2}, q_1) \quad (43)$$

où  $i_4 = -i_1 - i_2 - i_3$ . Ces deux égalités génèrent les 24 symétries du groupe tétraédral. En particulier,

si  $\sigma$  est une permutation de l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ , on a  $J_{i_1, i_2, i_3}(q_1, q_2, q_3) = J_{i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, i_{\sigma(3)}} \left( q_{\sigma(1)}^{\epsilon(\sigma)}, q_{\sigma(2)}^{\epsilon(\sigma)}, q_{\sigma(3)}^{\epsilon(\sigma)} \right)$

où  $\epsilon(\sigma) = \pm 1$  est la signature de  $\sigma$ .

**Exemple :** Pour  $r = 3$ ,  $q = e^{i\pi/3}$ , Il y a, à permutation près, trois hauteurs pour le graphe tétraédral pour lesquelles les modules de multiplicité ne sont pas nuls. Les trois polynômes de Laurent correspondants sont donnés par :

$$\begin{aligned} - J_{1,1,-1}(q_1, q_2, q_3) &= -q_3^2 - 1 - q_3^{-2}, \\ - J_{1,0,0}(q_1, q_2, q_3) &= -(qq_2 - q^{-1}q_2^{-1})(q^{-1}q_3 - qq_3^{-1}), \\ - J_{0,0,0}(q_1, q_2, q_3) &= -q_1 q_2 q_3 (q_1^{-2} + q_2^{-2} + q_3^{-2}) - q_1^{-1} q_2^{-1} q_3^{-1} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2). \end{aligned}$$

**1.3. Catégories relativement sphériques.** Pour adapter la construction de Turaev-Viro aux modules projectifs des groupes quantiques aux racines de l'unité, on utilise un certain nombre de propriétés de ces catégories de représentations que l'on synthétise dans la notion de catégories relativement sphériques.

On fixe comme dans la sous-section 1.1.1 un groupe  $G$  et un sous-ensemble  $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{-1} \subset G$ . On suppose que  $\mathcal{X}$  est petit dans  $G$  dans le sens suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall g_1, \dots, g_n \in G, \bigcup_{i=1}^n (g_i \mathcal{X}) \neq G \quad (44)$$

c'est-à-dire que  $G$  ne peut pas être recouvert par un nombre fini de copies translatées de  $\mathcal{X}$ . Pour simplifier, on suppose aussi que  $\mathcal{X} \supset \{g \in G : g^2 = 1\}$ .

**Définition 4.8.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie pivotale  $\mathbb{k}$ -linéaire et  $G$ -graduée,  $\mathcal{X}$  comme ci-dessus et  $\mathbf{A} = \{V \in \mathcal{C}_g : g \in G \setminus \mathcal{X}, V \text{ est simple}\}$ . Nous dirons que  $\mathcal{C}$  est  $G$ -sphérique relativement à  $\mathcal{X}$  si

- (1)  $\forall g \in G \setminus \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{C}_g$  est semi-simple avec un nombre fini (non nul) de classes d'isomorphisme d'objets simples.

- (2) Il existe une trace à droite non triviale  $\mathbf{t}$  sur l'idéal  $\mathbf{Proj}$  dont la fonction dimension associée est notée  $\mathbf{d}$ . De plus  $\forall V \in \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{d}(V) = \mathbf{d}(V^*)$ .
- (3) Il existe une fonction  $\mathbf{b} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{k}$  telle que  $\mathbf{b}(V) = \mathbf{b}(V^*)$ ,  $\mathbf{b}(V) = \mathbf{b}(V')$  pour toute paire d'objets isomorphes  $V, V' \in \mathbf{A}$  et telle que  $\forall g_1, g_2, g_1 g_2 \in G \setminus \mathcal{X}$  et  $\forall V \in G_{g_1 g_2}$  on ait

$$\mathbf{b}(V) = \sum_{V_1 \in \text{irr}(\mathcal{C}_{g_1}), V_2 \in \text{irr}(\mathcal{C}_{g_2})} \mathbf{b}(V_1) \mathbf{b}(V_2) \dim_{\mathbb{k}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, V_1 \otimes V_2))$$

où  $\text{irr}(\mathcal{C}_{g_i})$  est un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des objets simples de  $\mathcal{C}_{g_i}$ .

**Remarque 4.9.**

- (1) L'application  $\mathbf{b}$  existe toujours lorsque  $\mathbb{k}$  est un corps de caractéristique 0 et que  $\mathcal{C}$  est une catégorie dont les objets sont des  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Nous montrons dans [29] que  $\mathcal{D} = \sum_{V' \in \text{irr}(\mathcal{C}_g)} \dim_{\mathbb{k}}(V')^2$  ne dépend pas de  $g \in G \setminus \mathcal{X}$  et que l'application  $\mathbf{b} : V \mapsto \frac{1}{\mathcal{D}} \dim_{\mathbb{k}}(V)$  convient.
- (2) Ayant supposé que  $\mathcal{X}$  contenait tous les éléments d'ordre 2 de  $G$ , il existe une donnée basique  $\{(V_i, w_i)\}_{i \in I}$  pour  $(\mathcal{C}, G, \mathcal{X})$  (cf Remarque 4.2). On fixe une telle donnée. Il n'est pas difficile de vérifier que l'invariant de 3-variétés construit ci-après est indépendant de cette donnée.

**1.4. La somme d'états.** Soit  $M$  une 3-variété lisse orientée compacte sans bord. Par une triangulation de  $M$ , on désigne une structure de  $\Delta$ -complexe lisse sur  $M$  (voir [31]). Une structure de  $\Delta$ -complexe est un espace obtenu en quotientant une union disjointe de simplexes par l'identification de certaines de leurs faces. Cette notion est un peu plus large que la notion habituelle de triangulation dans laquelle on exige que deux simplexes non disjoints aient pour intersection une de leur face. Nous disons qu'une triangulation  $\mathcal{T}$  de  $M$  est *quasi-régulière* si chacun de ses simplexes est plongé dans  $M$ . Ceci équivaut au fait que toute arête de  $\mathcal{T}$  ait des extrémités distinctes.

Soit  $L \subset M$  un entrelacs non orienté. Une H-triangulation  $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$  de la paire  $(M, L)$  est la donnée d'une triangulation  $\mathcal{T}$  quasi-régulière de  $M$  ainsi que d'un circuit hamiltonien  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{T}$  représentant  $L$ . C'est-à-dire que  $\mathcal{L}$  est un ensemble d'arêtes de  $\mathcal{T}$  dont la réunion forme l'entrelacs  $L$  et tel que tout sommet de  $\mathcal{T}$  est contenu dans exactement deux arêtes de  $\mathcal{L}$ .

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $G$ -sphérique relativement à  $\mathcal{X}$  comme dans la sous-section précédente, munie d'une donnée basique  $I = \bigsqcup_{g \in G \setminus \mathcal{X}} I_g$ . L'espace des  $G$ -représentations de  $M$  est l'ensemble

$$\mathcal{M}(M, G) = \text{Hom}_{\text{Groupes}}(\pi_1(M, m), G)/G$$

où  $m$  est un point quelconque de  $M$  et  $g \in G$  agit sur un homomorphisme de groupe  $\rho \in \text{Hom}_{\text{Groupes}}(\pi_1(M, m), G)$  par conjugaison :  $(g \cdot \rho) : \gamma \mapsto g\rho(\gamma)g^{-1}$ . Dans le cas où  $G$  est commutatif, on a une bijection ensembliste canonique

$$\mathcal{M}(M, G) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(M, \mathbb{Z}), G) \cong H^1(M, G).$$

Un  $G$ -coloriage de  $\mathcal{T}$  est une représentation dans  $G$  du groupoïde fondamental de  $M$  avec pour points bases l'ensemble des sommets de  $\mathcal{T}$ . Un  $G$ -coloriage induit un élément de l'espace  $\mathcal{M}(M, G)$ . Nous en donnons une description combinatoire équivalente : Un  $G$ -coloriage de  $\mathcal{T}$  est une application  $\Phi$  de l'ensemble  $\vec{\mathcal{T}}_1$  des arêtes orientées de  $\mathcal{T}$  vers  $G$  telle que :

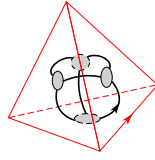
- (1) si  $e_1, e_2, e_3 \in \vec{\mathcal{T}}_1$  sont les arêtes formant dans cet ordre le bord d'une face orientée de  $\mathcal{T}$ , alors  $\Phi(e_1) \Phi(e_2) \Phi(e_3) = 1$ .
- (2)  $\Phi(-e) = \Phi(e)^{-1}$  pour tout  $e \in \vec{\mathcal{T}}_1$ , où  $-e$  est la même arête avec l'orientation opposée.

Le  $G$ -coloriage  $\Phi$  est admissible s'il ne prend pas de valeurs dans  $\mathcal{X}$ . Si le  $G$ -coloriage  $\Phi$  est admissible, un *état* de  $\Phi$  est une application  $\varphi : \vec{\mathcal{T}}_1 \rightarrow I$  telle que

- (1)  $\varphi(e) \in I_{\Phi(e)}$  pour tout  $e \in \vec{\mathcal{T}}_1$ ,
- (2)  $\varphi(-e) = \varphi(e)^*$  pour tout  $e \in \vec{\mathcal{T}}_1$ , où  $-e$  est la même arête avec l'orientation opposée.

On note  $\text{St}(\Phi)$  l'ensemble (fini) des états de  $\Phi$ . Pour  $\varphi \in \text{St}(\Phi)$ , les applications  $\text{b}\circ\varphi$  et  $\text{d}\circ\varphi$  sont insensibles à l'orientation des arêtes.

Si  $T$  est un tétraèdre dans l'ensemble  $\mathcal{T}_3$  des 3-simplexes de  $\mathcal{T}$ , on peut voir son 1-squelette comme un graphe plongé dans la sphère  $S^2$  orientée. Son graphe dual est un graphe trivalent à priori non orienté mais l'orientation de  $S^2$  fournit une correspondance bi-univoque entre les orientations de l'ensemble des arêtes de  $T$  et les orientations de l'ensemble des arêtes de son graphe dual. On convient que regardant la sphère du côté de sa normale sortante, l'arête du graphe dual traverse l'arête du tétraèdre de la droite vers la gauche, comme illustré sur la figure suivante :



Un état  $\varphi$  du tétraèdre induit un  $\mathcal{C}$ -coloriage de ce graphe trivalent. Son évaluation par  $F'$  donne un  $6j$ -symbole, noté  $|T|_\varphi$ , qui appartient au produit tensoriel de quatre modules de multiplicité associés aux faces orientées de  $T$  (l'orientation des faces est induite par l'orientation de  $T$  qui est héritée de celle de  $M$ ). En particulier, on peut vérifier que les modules de multiplicité associés à une face  $f$  pour deux tétraèdres adjacents le long de  $f$  sont en dualité. On peut donc contracter leur produit tensoriel par un couplage noté  $*_{f,\varphi}$ .

**Définition 4.10.** *La somme d'états associée à  $(\mathcal{T}, \mathcal{L}, \Phi)$  est*

$$TV(\mathcal{T}, \mathcal{L}, \Phi) = \sum_{\varphi \in \text{St}(\Phi)} \left( \prod_{e \in \mathcal{L}} \text{b}(\varphi(e)) \right) \left( \prod_{e \in \mathcal{T}_1 \setminus \mathcal{L}} \text{d}(\varphi(e)) \right) \bigotimes_{f \in \mathcal{T}_2} *_{f,\varphi} \bigotimes_{T \in \mathcal{T}_3} |T|_\varphi \in \mathbb{k}$$

où  $\mathcal{T}_1$  (resp.  $\mathcal{T}_2$ , resp.  $\mathcal{T}_3$ ) est l'ensemble des arêtes (resp. des faces, resp. des tétraèdres) de  $\mathcal{T}$ .

### 1.5. Les invariants de 3-variétés.

1.5.1. *Le théorème d'existence et d'invariance.* La somme d'états définie ci-dessus est un invariant de la classe de difféomorphisme du triplet  $(M, L, [\Phi])$ . Soient  $\mathcal{C}, G, \mathcal{X}, I$  comme dans la section précédente.

**Théorème 4.11.** *Soit  $M$  une 3-variété lisse orientée compacte sans bord, soit  $L \subset M$  un entrelacs non vide plongé dans  $M$ , soit  $\rho \in \mathcal{M}(M, G)$ .*

- (1) *Il existe un triplet  $(\mathcal{T}, \mathcal{L}, \Phi)$  admissible pour  $(M, L, \rho)$ , c'est-à-dire où  $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$  est une  $H$ -triangulation de  $(M, L)$  et  $\Phi$  est un  $G$ -coloriage admissible de  $\mathcal{T}$  représentant  $\rho$ .*
- (2) *Les sommes d'états associées à deux triplets admissibles pour  $(M, L, \rho)$  coïncident. Ceci permet de définir*

$$TV(M, L, \rho) = TV(\mathcal{T}, \mathcal{L}, \Phi),$$

où  $(\mathcal{T}, \mathcal{L}, \Phi)$  est un triplet admissible pour  $(M, L, \rho)$ .

L'existence de  $H$ -triangulation est prouvée par Baseilhac et Benedetti dans [4]. Pour trouver un  $G$ -coloriage admissible de  $\mathcal{T}$  représentant  $\rho$ , on modifie un  $G$ -coloriage non admissible représentant  $\rho$  par des transformations de jauge (qui consistent à multiplier les valeurs de  $\Phi$  sur toutes les arêtes issues d'un même sommet par le même élément de  $G$ ). Ici on utilise de manière essentielle

l'hypothèse de quasi-régularité de  $\mathcal{T}$  et le fait que  $\mathcal{X}$  est « petit » (voir la propriété (44)). Il est utile de remarquer qu'il n'est pas nécessaire de modifier  $\mathcal{T}$  pour trouver un élément  $\Phi$  représentant  $\rho$ .

La méthode pour démontrer que la somme d'états ne dépend que de  $(M, L, \rho)$  est une adaptation de celle faite par Turaev et Viro. On montre l'invariance de la somme d'états lorsque l'on fait certaines modifications locales du triplet  $(\mathcal{T}, \mathcal{L}, \Phi)$  que l'on voit comme des mouvements élémentaires sur l'ensemble de tous les triplets. Il faut ensuite montrer que deux triplets admissibles pour  $(M, L, \rho)$  quelconques sont reliés par un nombre fini de ces mouvements. Un mouvement est dit positif s'il augmente le nombre d'arêtes de la triangulation, il est négatif sinon. Décrivons ces modifications locales qui sont schématisées Figure 2 :

- (A) Le mouvement « H-bubble » positif remplace le voisinage d'une face dont une arête au moins est dans  $\mathcal{L}$  par deux nouveaux tétraèdres recollés entre eux le long de trois de leurs faces. Ces deux nouveaux tétraèdres forment une triangulation d'une boule diffeomorphe à  $B^3$  (très aplatie sur la figure) dont le bord est une sphère triangulée par deux triangles. La face initiale est dédoublée et trois nouvelles faces sont créées. L'une d'entre elle contient l'arête appartenant à  $\mathcal{L}$ . On retire cette arête de  $\mathcal{L}$  et on la remplace par les deux autres arêtes de cette face de sorte que  $\mathcal{L}$  reste un circuit hamiltonien. Une fois choisie arbitrairement la nouvelle valeur de  $\Phi$  sur l'une des trois nouvelles arêtes, il existe un unique prolongement aux deux autres nouvelles arêtes. L'invariance de la somme d'états par ce mouvement est une conséquence de la relation d'orthonormalité (cf Théorème 4.7) et de la propriété satisfaite par la fonction  $b$ .
- (B) Le mouvement « H-Pachner » positif est une modification locale de la triangulation où deux tétraèdres adjacents le long d'une face (horizontale dans la figure 2(B)) sont remplacés par trois tétraèdres ayant une arête (verticale) commune. L'ensemble  $\mathcal{L}$  n'est pas modifié et  $\Phi$  se prolonge de manière unique sur la nouvelle triangulation. L'invariance de la somme d'états par ce mouvement est traduction directe de l'identité de Biedenharn-Elliott (cf Théorème 4.6) satisfaite par les 6j-symboles.
- (C) Le mouvement « H-lune » positif remplace le voisinage de deux faces adjacentes par deux nouveaux tétraèdres recollés entre eux le long de deux de leurs faces. Ces deux nouveaux tétraèdres forment une triangulation d'une boule diffeomorphe à  $B^3$  dont le bord est une sphère triangulée par quatre triangles. Ici encore, l'ensemble  $\mathcal{L}$  n'est pas modifié et  $\Phi$  se prolonge de manière unique sur la nouvelle triangulation. L'invariance de la somme d'états

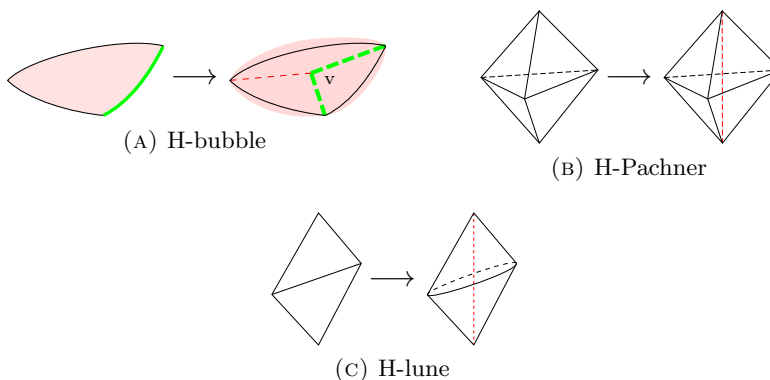


FIGURE 2. Modifications élémentaires positives. Toute les arêtes vertes et aucune des arêtes rouges sont dans  $\mathcal{L}$ .

par ce mouvement est traduction directe de la relation d'orthonormalité satisfaite par les 6j-symboles.

En pratique, on commence par montrer que deux  $G$ -coloriages admissibles de la même H-triangulation représentant  $\rho$  sont reliés par un nombre fini de ces mouvements qui ne font apparaître que des triplets  $(\mathcal{T}, \mathcal{L}, \Phi)$  admissibles. Ceci fait, en ignorant le  $G$ -coloriage, on utilise le théorème de [4] énonçant que deux H-triangulations de  $(M, L)$  sont reliées parmi les H-triangulations par un chemin obtenu par un nombre fini de mouvement. Enfin, à chaque étape de ce chemin, on modifie le coloriage de la H-triangulation pour faire en sorte que le mouvement suivant relie deux triplets  $(\mathcal{T}, \mathcal{L}, \Phi)$  admissibles. La somme d'états restant constante tout au long de ce chemin ne varie donc pas lorsque l'on change le triplet admissible pour  $(M, L, \rho)$ .

1.5.2. *Un raffinement pour  $U_q \mathfrak{sl}_2$ .* Soit  $q = e^{i\pi/r}$  où  $r$  est un entier impair supérieur ou égal à 3. Rappelons l'inclusion d'algèbres de Hopf pivotales  $U_q \mathfrak{sl}(2) \subset U_q^H \mathfrak{sl}(2)$  et le foncteur associé  $F^H : \mathcal{C}^H \rightarrow \mathcal{C}_\mathbb{C} \subset \mathcal{C}$  qui revient à oublier l'action de  $H$  sur un module de poids.

Pour la catégorie  $\mathcal{C}_\mathbb{C}$ , le groupe  $G = \mathbb{C} \cong (\mathbb{C}/2\mathbb{Z}, +)$  est commutatif et  $\mathcal{X} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$ . Pour  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ , les modules  $V_\alpha$  et  $V_{\alpha+2r}$  de  $\mathcal{C}_\alpha^H$  (cf Section 1.2) ne diffèrent que par l'action de  $H$ . On désigne par  $\tilde{\alpha}$  la classe de  $\alpha$  modulo  $2r$  et  $V_{\tilde{\alpha}} = F^H(V_\alpha) = F^H(V_{\alpha+2r}) \in \mathcal{C}_{\tilde{\alpha}}$ . Alors,  $\mathcal{C}_{\tilde{\alpha}}$  contient  $r$  classes d'isomorphisme de modules simples et un ensemble de représentants de ces classes est donné par  $\{V_{\tilde{\alpha}} : \tilde{\alpha} \in \mathbb{C}/2r\mathbb{Z}, \tilde{\alpha} \equiv \bar{\alpha} \text{ modulo } 2\}$ . Ainsi, la catégorie  $\mathcal{C}_\mathbb{C}$  est une catégorie  $G$ -sphérique relativement à  $\mathcal{X}$  en prenant pour  $\mathfrak{b}$  la fonction constante égale à  $1/r^2$ . C'est l'exemple choisi dans l'article [29] pour illustrer la construction de l'invariant  $TV(M, L, \rho)$  du théorème 4.11. Remarquons que dans ce contexte,  $\rho \in H^1(M, \mathbb{C}/2\mathbb{Z}) \simeq H^1(M, \mathbb{C}^*) \simeq H_2(M, \mathbb{C}^*)$ .

La complexité de la somme d'états rend l'évaluation effective de  $TV$  difficile, cependant, nous calculons explicitement un exemple très simple (où  $M$  est l'espace lenticulaire  $L_{5,2}$ ) et nous montrons que l'invariant  $TV$  dépend effectivement de l'entrelacs et du choix de la classe de cohomologie.

Dans l'article [26], nous montrons que les 6j-symboles de la catégorie  $\mathcal{C}_\mathbb{C}$  peuvent aussi être exprimés par les polynômes  $J_{i,j,k}$  de la sous-section 1.2. Tirant parti de ce que ces polynômes vérifient formellement les analogues de l'identité de Biedenharn-Elliott (cf Théorème 4.6) et de la relation d'orthonormalité (cf Théorème 4.7), on montre que le groupe  $\mathbb{C}^*$  peut être remplacé par n'importe quel groupe abélien pour produire un invariant à valeurs dans un anneau  $R$  adapté à  $G$ .

Toujours dans l'article [26], nous introduisons un raffinement de l'invariant  $TV$  associé à  $\mathcal{C}_\mathbb{C}$ . La hauteur des 6j-symboles définie dans la sous-section 1.2 permet d'associer à chaque état  $\varphi \in \text{St}(\Phi)$  de la somme  $TV(\mathcal{T}, \mathcal{L}, \Phi)$  (cf Définition 4.10), un 2-cocycle  $h^2(\varphi)$  à valeurs entières. Notons  $h_1(\varphi)$  la classe de  $H_1(M, \mathbb{Z})$  duale de Poincaré de la classe de cohomologie de  $h^2(\varphi)$ . Enfin si  $h \in H_1(M, \mathbb{Z})$ , notons  $\text{St}(\Phi, h) = \{\varphi \in \text{St}(\Phi) : h_1(\varphi) = h\}$  qui est vide sauf pour un nombre fini de valeurs de  $h \in H_1(M, \mathbb{Z})$ . Alors la somme d'états se scinde :

$$\sum_{\varphi \in \text{St}(\Phi)} = \sum_{h \in H_1(M, \mathbb{Z})} \sum_{\varphi \in \text{St}(\Phi, h)}$$

et on montre que les sommes partielles pour  $h$  fixé sont déjà des invariants du quadruplet  $(M, L, \rho, h)$ . Ainsi, on définit un invariant raffiné  $\tau(M, L, \rho, h)$  et l'on a

$$TV(M, L, \rho) = \sum_{h \in H_1(M, \mathbb{Z})} \tau(M, L, \rho, h).$$

Il pourrait être intéressant d'étudier si un raffinement similaire existe déjà pour l'invariant de Turaev-Viro usuel provenant de la catégorie modulaire associée à  $U_q \mathfrak{sl}(2)$  aux racines de l'unité.

1.5.3. *Les applications aux autres groupes quantiques.* Soit  $\mathcal{U}$  l'un des groupes quantiques aux racines impaires de l'unité étudiés dans la section 3 du chapitre 3 et  $\mathcal{C}$  la catégorie pivotale associée. Compte tenu des théorèmes 3.6 et 3.7 il n'est pas difficile de voir que la catégorie  $\mathcal{C}$  est relativement sphérique pour l'application constante  $\mathbf{b}$  égale à  $r^{-n-N}$ . L'invariant  $TV(M, L, \rho)$  dépend alors de  $\rho \in \mathcal{M}(M, G^*)$  qui peut s'interpréter comme une classe d'isomorphisme de  $G^*$ -fibré plat. Il est bien sûr décevant que cette structure supplémentaire fasse intervenir le groupe dual  $G^*$  plutôt que le groupe de Lie simple  $G$ . Il est possible que cette construction puisse être « tordue » pour obtenir une fonction sur  $\mathcal{M}(M, G)$  ayant plus d'intérêt géométrique. Les idées développées par Kashaev et Reshetikhin [43] suggèrent qu'une telle construction soit possible.

Geer, Kashaev et Turaev ont récemment généralisé la construction originale de Kashaev [35] qui est à l'origine de la conjecture du volume. Il décrivent la notion de  $\Psi$ -système sur des catégories tensorielles avec dualité (non nécessairement pivotales). Il s'agit essentiellement de structures algébriques présentes sur les modules de multiplicité de ces catégories. Lorsqu'il existe un  $\widehat{\Psi}$ -système, sorte de racine carré du  $\Psi$ -système, ils peuvent construire un invariant de 3-variétés fermées en considérant des sommes d'états sur des triangulations munies de « systèmes de charges ». Cependant, l'unique exemple connu de  $\widehat{\Psi}$ -système était celui provenant des représentations du Borel de  $U_q\mathfrak{sl}_2$  initialement utilisées dans [35, 4]. Nous montrons, aussi dans l'article [27], que les catégories  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  fournissent grâce à la fonction dimension modifiée toute une famille de  $\widehat{\Psi}$ -systèmes et que les invariants associés sont les mêmes que ceux que nous définissons via les 6j-symboles modifiés.

Je voudrais terminer cette section en présentant certains des inconvénients de cette construction. Tout d'abord, des formules explicites des 6j-symboles semblent très difficiles à obtenir dans le cas général. Même dans le cadre semi-simple des catégories modulaires, de telles formules pour les groupes quantiques n'existent que pour  $U_q\mathfrak{sl}(2)$  (cf [43, 49]). Si l'on se restreint aux représentations nilpotentes de  $U_q\mathfrak{sl}(2)$  pour lequel nous avons donné des valeurs explicites des 6j-symboles, il reste un second problème pour pouvoir calculer explicitement les invariants : la complexité du calcul de  $TV$ . En effet le nombre d'états intervenants dans la somme est de  $a^r$  où  $a$  est le nombre d'arêtes de la triangulation et  $2r$  est l'ordre de la racine de l'unité  $q$ . Or il se trouve que les triangulations quasi-régulières d'une 3-variété ont un nombre d'arêtes bien plus conséquent que par exemple les triangulations idéales (avec un seul sommet). Ceci rend le calcul de  $TV$  très difficile, même par ordinateur.

**1.6. HQFT.** Dans l'article [27], nous donnons une version relative de l'invariant  $TV$  (associé à une catégorie relativement sphérique) pour des variétés à bords afin de construire une sorte de HQFT (cf [63])  $\overline{\mathcal{Q}}$  appelée « théorie relative des champs quantiques ». Je n'en dit ici que quelques mots.

Pour cette théorie, on considère des surfaces marquées c'est-à-dire ayant un nombre fini (non nul) de points marqués et munies d'une représentation du groupoïde fondamental de la surface basé en ces points vers  $G^*$ . La surface vide est acceptée.

Un cobordisme  $M$  entre deux telles surfaces doit être équipé d'un graphe plongé (sans structure en bande) ayant pour extrémités les points marqués. L'ensemble des sommets du graphe forme les points bases  $B$  de  $M$  qui est munie d'une représentation de  $\pi_1(M, B)$  dans  $G^*$  compatible avec celles des surfaces marquées qui forment son bord.

Le foncteur monoïdal  $\overline{\mathcal{Q}}$  associe un espace vectoriel  $\overline{\mathcal{Q}}(\Sigma)$  de dimension finie à une surface marquée et des applications linéaires aux cobordismes. Si  $\overline{M} = (M, L, \rho)$  est une variété fermée vue comme un cobordisme du vide vers le vide, alors  $\overline{\mathcal{Q}}(\overline{M}) = TV(M, L, \rho)$ .

## 2. Invariants par chirurgie

Nous présentons dans cette section les résultats de l'article [11]. La première construction des invariants quantiques des 3-variétés est due à Reshetikhin et Turaev ([58]). Ces invariants sont calculés à partir des présentations des 3-variétés - fermées orientées - par chirurgie le long d'entrelacs en bandes plongés dans  $S^3$ . Leur invariance repose sur le théorème de Kirby ([42]) qui décrit deux types de modifications des entrelacs permettant de relier en un nombre fini de mouvements tous les entrelacs produisant par chirurgie la même 3-variété fermée.

La construction utilise une catégorie modulaire  $\mathcal{C}$ . Si la 3-variété  $M$  est présentée par un entrelacs  $L$ , l'invariant  $RT(M)$  est une somme pondérée de tous les invariants de l'entrelacs colorié par toutes les combinaisons possibles d'objets simples de  $\mathcal{C}$ .

Dans cette partie nous définissons, à partir de la donnée algébrique d'une « catégorie relativement modulaire », des invariants de triplets  $(M, T, \omega)$  « compatibles » où  $T$  est un graphe en rubans colorié (éventuellement vide) et  $\omega$  est une 1-classe de cohomologie sur  $M \setminus T$ . Pour simplifier, considérons la catégorie  $\mathcal{C}^H$  associée au groupe quantique déroulé  $U_q^H \mathfrak{sl}(2)$  (cf Section 2, Chapitre 3). La compatibilité exigée de  $T$  et  $\omega$  peut être interprétée de la manière suivante : La catégorie fibre sur  $\mathbb{C}^*$ , le tore maximal de  $SL_2(\mathbb{C})$  (i.e.  $\mathcal{C}^H$  est  $\mathbb{C}^*$ -graduée) et  $\omega \in H^1(M \setminus T, \mathbb{C}^*)$ . Ainsi,  $\omega$  est équivalente à une classe d'isomorphisme de  $\mathbb{C}^*$ -fibré plat. Le  $\mathcal{C}^H$ -coloriage de  $T$  et  $\omega$  sont compatibles si chaque arête de  $T$  est coloriée par un module dont le degré est donné par l'holonomie autour de cette arête du  $\mathbb{C}^*$ -fibré plat correspondant à  $\omega$ . Nous précisons cette définition dans les sous-sections suivantes.

On définit (cf Définition 4.13) la notion de triplet admissible. On peut alors partitionner l'ensemble  $\mathcal{M}$  des triplets compatibles en deux ensembles : l'ensemble des triplets admissibles  $\mathcal{M}^a$  et son complémentaire  $\mathcal{M}^0$ . Alors on définit deux invariants  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}^0$  des classes de difféomorphismes de triplets compatibles qui se complètent dans le sens suivant : le premier  $\mathbb{N}$  n'est défini que sur  $\mathcal{M}^a$  et le deuxième est défini sur tous les triplets mais il s'annule en dehors de  $\mathcal{M}^0$ .

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & & \uparrow \mathbb{N} \\ \mathcal{M} = & \mathcal{M}^0 & \sqcup & \mathcal{M}^a \\ & \mathbb{N}^0 \downarrow & & \downarrow \mathbb{N}^0 \\ & \mathbb{C} & & 0 \end{array}$$

Ces deux invariants sont reliés par le théorème 4.14. On remarquera la similitude avec la relation entre  $F'$  et  $F$  (cf (29)).

**2.1. Premier aperçu pour  $U_q^H \mathfrak{sl}(2)$ .** Comme dans l'article [11] nous commençons par donner une première définition pour  $U_q^H \mathfrak{sl}(2)$ , des invariants  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}^0$ .

Soit  $r \in \mathbb{Z} \setminus 4\mathbb{Z}$  un entier plus grand que 2 et  $q = e^{i\pi/r}$ . Soit  $H_r = \{1 - r, 3 - r, \dots, r - 1\}$ . Rappelons que la catégorie  $\mathcal{C}^H$  des représentations de poids de  $U_q^H \mathfrak{sl}(2)$  (cf Section 2, Chapitre 3) est graduée par le groupe  $G = (\mathbb{C}/2\mathbb{Z}, +) \simeq (\mathbb{C}^*, \times)$ .

La discussion suivante est valable pour tout groupe commutatif  $G$  graduant une catégorie enrubannée  $\mathcal{C}^H$ . Soit  $(M, T, \omega)$  un triplet où  $M$  une variété de dimension 3 orientée fermée,  $T \subset M$  un graphe en rubans (éventuellement vide)  $\mathcal{C}^H$ -colorié et  $\omega \in H^1(M \setminus T, G)$ . Si  $e$  est une arête orientée (ou une composante circulaire) de  $T$ , nous désignons par  $m_e \in H_1(M \setminus T, \mathbb{Z})$  son méridien orienté (de manière compatible avec l'orientation de  $M$ ). On dénote par  $\omega(m_e)$  la valeur sur  $m_e$  de  $\omega$  vue comme une fonction sur l'homologie (ici on identifie  $H^1(M \setminus T, G) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(M \setminus T, \mathbb{Z}), G)$ ).  $\omega \in H^1(M \setminus T, G)$  est dite compatible avec le  $\mathcal{C}^H$ -coloriage de  $T$  si chaque arête  $e$  de  $T$  est colorié par un objet  $V \in \mathcal{C}_{\omega(m_e)}$ . On dit alors que  $(M, T, \omega)$  est un *triplet compatible*.

Soit  $L \cup T \subset S^3$  une présentation de  $(M, T)$  par chirurgie (on fixe une orientation de  $L$ ). L'inclusion

$S^3 \setminus L \hookrightarrow M$  fournit une application surjective  $H_1(S^3 \setminus (L \cup T), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M \setminus T, \mathbb{Z})$  et une injection

$$H^1(M \setminus T, G) \hookrightarrow H^1(S^3 \setminus (L \cup T), G).$$

Ici, nous continuons de noter par  $T$  l'image de  $T$  dans  $S^3 \setminus L$  et par  $\omega$  l'image de  $\omega$  dans  $H^1(S^3 \setminus (L \cup T), G)$ .

Revenons au cas de la catégorie des représentations de poids de  $U_q^H \mathfrak{sl}(2)$  pour laquelle  $G = \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$ . Nous disons que  $L \cup T$  est une *présentation calculable* du triplet compatible  $(M, T, \omega)$  si pour chaque composante  $L_i$  de  $L$  dont on note par  $m_i$  le méridien, on a  $\omega(m_i) \notin \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Si  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ , on dit que la combinaison linéaire formelle de modules

$$\Omega_\alpha = \sum_{h \in H_r} d(V_{\alpha+h}) V_{\alpha+h}$$

est une couleur de Kirby de degré  $\bar{\alpha} \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$  où  $\bar{\alpha}$  est la classe de  $\alpha$  modulo 2. Si  $L \cup T \subset S^3$  est une présentation calculable du triplet compatible  $(M, T, \omega)$ , on considère un entrelacs  $\mathcal{C}^H$ -colorié  $L_\omega$  obtenu comme l'entrelacs  $L$  dont on a colorié la  $i^{\text{ème}}$  composante  $L_i$  par une couleur de Kirby de degré  $\omega(m_i)$  où  $m_i$  est un méridien de  $L_i$ .

$$\text{Soit } \Delta_- = \begin{cases} i(rq)^{\frac{3}{2}} & \text{si } r \equiv 1 \pmod{4} \\ (i-1)(rq)^{\frac{3}{2}} & \text{si } r \equiv 2 \pmod{4} \\ -(rq)^{\frac{3}{2}} & \text{si } r \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \text{ et } \Delta_+ \text{ le nombre complexe conjugué de } \Delta_-.$$

**Théorème 4.12.**

Soit  $(M, T, \omega)$  un triplet compatible admettant une présentation calculable  $L \cup T \subset S^3$ . Soit  $(n_+, n_-)$  la signature de la matrice d'enlacement de  $L$ . Alors

$$\mathbf{N}(M, T, \omega) = \frac{\mathbf{F}'(L_\omega \cup T)}{\Delta_+^{n_+} \Delta_-^{n_-}}$$

ne dépend que de la classe de difféomorphisme direct du triplet  $(M, T, \omega)$ .

Tous les triplets compatibles  $(M, T, \omega)$  n'admettent pas de présentation calculable. Nous verrons dans la section suivante comment étendre la définition de  $\mathbf{N}$  à l'ensemble  $\mathcal{M}^a$  des triplets admissibles :

**Définition 4.13.** Un triplet compatible  $(M, T, \omega)$  est dit admissible si  $T$  contient une arête coloriée par un module simple projectif ou si  $\omega$  prend une valeur non entière modulo 2 (où  $\omega$  est vue comme une fonction sur  $H_1(M \setminus T, \mathbb{Z})$ ).

On peut aisément définir la somme connexe  $(M, T, \omega) \# (M', T', \omega')$  de deux triplets compatibles. Le résultat est un triplet compatible formé de la somme connexe des variétés dans laquelle est naturellement plongé le graphe  $T \sqcup T'$  et muni de la forme induite par  $\omega$  et  $\omega'$ . Il est clair que pour que  $(M, T, \omega) \# (M', T', \omega')$  soit admissible, il suffit que  $(M', T', \omega')$  le soit. Une fois la définition de  $\mathbf{N}$  étendue aux triplets admissibles,  $\mathbf{N}^0$  est défini de manière indirecte :

**Théorème 4.14.** Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble de tous les triplets compatibles. Il existe un unique invariant  $\mathbf{N}^0 : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  tel que pour tout triplet compatible  $(M, T, \omega) \in \mathcal{M}$  et pour tout triplet admissible  $(M', T', \omega') \in \mathcal{M}^a$ , on ait :

$$\mathbf{N}((M, T, \omega) \# (M', T', \omega')) = \mathbf{N}(M', T', \omega') \cdot \mathbf{N}^0(M, T, \omega) \tag{45}$$

En pratique, pour calculer  $\mathbf{N}^0(M, T, \omega)$ , on choisit  $(M', T', \omega') = (S^3, u_\alpha, \omega_\alpha)$  où  $u_\alpha$  est le noeud trivial colorié par  $V_\alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  et  $\omega_\alpha$  est l'unique classe de cohomologie compatible. Alors, en prenant une présentation où  $L = \emptyset$  de  $S^3$ , on connaît la valeur  $\mathbf{N}(S^3, u_\alpha, \omega_\alpha) = \mathbf{F}'(u_\alpha) = d(V_\alpha)$ .

Nous décrivons quelques propriétés de ces invariants :



- (1) L'invariant  $N$  est nul sur les sommes connexes de triplets admissibles.
- (2) L'invariant  $N(S^3, T, \omega)$  est simplement égal à  $F'(T)$  ( $\omega$  est alors uniquement déterminée par le  $\mathcal{C}^H$ -coloriage de  $T$ ). En particulier  $N$  prolonge les invariants ADO ([1]) des entrelacs dans  $S^3$ .
- (3) Pour  $r = 2$ ,  $N(S^3, L, \omega)$  est à un facteur près le polynôme multivariable d'Alexander-Conway des entrelacs dans  $S^3$ . Son extension aux graphes trivalents dans  $S^3$  avait été étudiée par Viro ([67]). Ici,  $N$  étend cet invariant pour des graphes dans les variétés de dimension trois.
- (4) Si  $L$  est un entrelacs dans  $S^3$  colorié par le module  $V_0$ ,  $N(S^3, L, 0)$  est l'invariant de Kashaev et Murakami-Murakami ([39, 50]) pour lequel existe la fameuse conjecture du volume. Ici encore,  $N$  en donne une extension pour des entrelacs dans des 3-variétés orientées fermées.
- (5) L'invariant  $N^0$  peut être calculé pour des 3-variétés orientées fermées vides de tout graphe et muni de la classe de cohomologie nulle. Il est aussi possible de l'évaluer lorsque  $L$  est un entrelacs colorié par la couleur de Jones-Kauffman (représentation irréductible de dimension 2 de  $U_q^H \mathfrak{sl}(2)$ ). L'invariant ainsi obtenu généralise le polynôme de Jones aux racines de l'unité dans  $S^3$  au cas d'un entrelacs dans une 3-variété orientée fermée. Cet invariant satisfait les relations d'écheveaux du crochet de Kauffman et en cela, il ressemble beaucoup à l'invariant de Witten-Reshetikhin-Turaev.

Je pose maintenant quelques questions qui viennent naturellement concernant ces invariants :

- (1) Quelles relations y a-t-il entre l'invariant  $TV(M, L, \omega)$  de la section 1.5.2 et l'invariant  $N$ ? Je conjecture l'existence d'une construction « de type double » qui associe à  $(M, L, \omega)$  un triplet admissible  $D(M, L, \omega)$  et telle que  $TV(M, L, \omega) = \lambda \cdot N(D(M, L, \omega))$  où  $\lambda$  ne dépend que de  $r$ . Ce phénomène étendrait la relation bien connue entre l'invariant de Turaev-Viro et l'invariant de Reshetikhin-Turaev (voir [62, Theorem VII.4.1.1]).
- (2) Quelles relations y a-t-il entre l'invariant  $N^0$  et l'invariant de Witten-Reshetikhin-Turaev? Sont-ils égaux ou équivalents? Quant à l'invariant  $N$ , il permet de distinguer des 3-variétés (les espaces lenticulaires  $L(65, 8)$  et  $L(65, 18)$ ) qui sont homotopiquement équivalentes et qui ne sont pas distinguées par les invariants de Witten-Reshetikhin-Turaev associés à  $U_q \mathfrak{sl}_2$ .
- (3) Est-il raisonnable de généraliser la conjecture du volume au cas d'un entrelacs irréductible dans une 3-variété orientée fermée? Et à  $N^0$  pour une variété hyperbolique fermée vide? Plus précisément, si  $L$  est un entrelacs irréductible colorié par  $V_0$  dans une 3-variété orientée fermée  $M$  tel que  $M \setminus L$  admet une structure hyperbolique, est-il vrai que pour toute valeur de  $\omega \in H^1(M \setminus L, \mathbb{C}^*)$ ,

$$\lim_{r=2n+1 \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{r} \log(|N_r(M, L, \omega)|) = \text{Volume}(M \setminus L).$$

(Ici  $(N_r)_{r \geq 2}$  est la famille des invariants  $N$  correspondants aux différentes racines de l'unité). Nous montrons en tout cas dans [11] que cet énoncé est vrai pour une famille infinie d'entrelacs plongés dans des sommes connexes de  $S^2 \times S^1$  (les entrelacs hyperboliques fondamentaux ([13])).

- (4) Quelle sorte de 2+1-TQFT est associée aux invariants  $N$  et  $N^0$ ? Quel type de foncteur modulaire (cf [62, Chapter III]). En particulier, les représentations du groupe des difféotopies d'une surface associées aux TQFT de Witten-Reshetikhin-Turaev ne sont jamais fidèles : les twists de Dehn sont toujours envoyés sur des matrices d'ordre fini. Les premières investigations concernant les représentations du groupe des difféotopies d'une surface associées

aux invariants  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{N}^0$  semblent montrer que les twists de Dehn sont envoyés sur des matrices d'ordre infini car non semi-simples.

**2.2. Catégories relativement modulaires.** Dans cette section nous généralisons la construction précédente aux catégories enrubannées des représentations nilpotentes de poids des groupes quantiques déroulés. Nous donnons aussi quelques détails sur les démonstrations de l'existence de ces invariants. Nous synthétisons dans la notion de catégories relativement modulaire, les propriétés de ces catégories que nous utilisons dans cette construction. En particulier, pour pouvoir utiliser la structure enrubannée, nous devons utiliser la catégorie  $\mathcal{C}^H$  des représentations du groupe quantique déroulé plutôt que son analogue  $\mathcal{C}$ . En quelque sorte, on peut voir  $F^H : \mathcal{C}^H \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$  comme une sorte de revêtement infini cyclique. Pour tout degré  $t \in \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{C}_t$  possède un nombre fini de classes d'isomorphisme d'objets simples mais ce n'est pas la cas de  $\mathcal{C}_t^H$ . Pour remédier aux problèmes que cela pose, on introduit l'action du groupe  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathcal{C}_t^H$ . Le groupe  $\mathbb{Z}$  peut être considéré comme le groupe du revêtement  $F^H$ .

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie enrubannée  $\mathbb{k}$ -linéaire où  $\mathbb{k}$  est un corps. Un ensemble d'objets de  $\mathcal{C}$  est dit *commutatif* si pour toute paire  $\{V, W\}$  de ces objets, on a  $c_{V,W} \circ c_{W,V} = \text{Id}_{W \otimes V}$  et  $\theta_V = \text{Id}_V$ . Soit  $(\mathbb{Z}, +)$  un groupe commutatif. Une *réalisation* de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathcal{C}$  est un ensemble d'objets commutatif  $\{\varepsilon^t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  tel que  $\varepsilon^0 = \mathbb{I}$ ,  $\text{qdim}(\varepsilon^t) = 1$  et  $\varepsilon^t \otimes \varepsilon^{t'} = \varepsilon^{t+t'}$  pour tous  $t, t' \in \mathbb{Z}$ .

On montre facilement le lemme suivant :

**Lemme 4.15.** *Soit  $\{\varepsilon^t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  une réalisation de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathcal{C}$ . Si  $t \in \mathbb{Z}$  alors  $\varepsilon^t$  est simple. De plus,  $\forall V, W \in \mathcal{C}$ , l'application  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V \otimes \varepsilon^t, W \otimes \varepsilon^t)$  donnée par  $f \mapsto f \otimes \text{Id}_{\varepsilon^t}$  est un isomorphisme. En particulier, si  $V$  est simple alors  $V \otimes \varepsilon^t$  l'est aussi.*

Ainsi, une réalisation de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathcal{C}$  produit une action de  $\mathbb{Z}$  sur les classes d'isomorphisme d'objets de  $\mathcal{C}$  par  $(t, V) \mapsto \varepsilon^t \otimes V$  (remarquons que  $\varepsilon^t \otimes V \simeq V \otimes \varepsilon^t$ ). Nous disons que  $\{\varepsilon^t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  est une *réalisation libre* de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathcal{C}$  si cette action est libre. Ceci signifie que  $\forall t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  et pour tout objet simple  $V \in \mathcal{C}$ ,  $V \otimes \varepsilon^t \not\simeq V$ . On appelle  *$\mathbb{Z}$ -orbite simple* la réunion des classes d'isomorphisme d'une orbite de cette action.

**Définition 4.16.** *Soient  $(G, \times)$  et  $(\mathbb{Z}, +)$  deux groupes commutatifs. Une catégorie  $\mathbb{k}$ -linéaire enrubannée  $\mathcal{C}$  est  $G$ -modulaire relativement à  $\mathcal{X}$  avec dimension modifiée  $d$  et groupe de périodicité  $\mathbb{Z}$  si*

- (1)  $\mathcal{C}$  est  $G$ -graduée,
- (2) le groupe  $\mathbb{Z}$  a une réalisation libre  $\{\varepsilon^t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  dans  $\mathcal{C}_1$  (où  $1 \in G$  est l'élément neutre),
- (3) il existe une application  $\mathbb{Z}$ -bilinéaire  $G \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{k}^\times$ ,  $(g, t) \mapsto g^{\bullet t}$  telle que  $\forall V \in \mathcal{C}_g, \forall t \in \mathbb{Z}$ ,  $c_{V, \varepsilon^t} \circ c_{\varepsilon^t, V} = g^{\bullet t} \text{Id}_{\varepsilon^t \otimes V}$ ,
- (4) il existe  $\mathcal{X} \subset G$  tel que  $\mathcal{X}^{-1} = \mathcal{X}$  et  $G$  ne peut être recouvert par un nombre fini de copies translatées de  $\mathcal{X}$ , c'est-à-dire  $\forall g_1, \dots, g_n \in G$ ,  $\bigcup_{i=1}^n (g_i \mathcal{X}) \neq G$ ,
- (5) pour tout  $g \in G \setminus \mathcal{X}$ , la catégorie  $\mathcal{C}_g$  est semi-simple et ses objets simples sont dans la réunion d'un nombre fini de  $\mathbb{Z}$ -orbites simples,
- (6) Il existe une trace non nulle  $\mathfrak{t}$  sur l'idéal Proj des projectifs de  $\mathcal{C}$  dont  $d$  est la dimension modifiée associée,
- (7) Il existe un élément  $g \in G \setminus \mathcal{X}$  et un objet  $V \in \mathcal{C}_g$  tels que le scalaire  $\Delta_+$  défini Figure 3 est non nul; de même, il existe un élément  $g \in G \setminus \mathcal{X}$  et un objet  $V \in \mathcal{C}_g$  tels que le scalaire  $\Delta_-$  défini Figure 3 est non nul,

$$F \left( \begin{array}{c} \text{Kirby color } \Omega_g \\ \downarrow V \end{array} \right) = \Delta_- \text{Id}_V, \quad F \left( \begin{array}{c} \text{Kirby color } \Omega_g \\ \downarrow V \end{array} \right) = \Delta_+ \text{Id}_V$$

FIGURE 3. Ici  $V \in \mathcal{C}_g$  et  $\Omega_g$  est une couleur de Kirby de degré  $g$  (cf Définition 4.17).

(8) le morphisme  $F(H(U, V)) \neq 0 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V)$ , pour tous objets simples  $U, V \in \text{Proj}$ , où

$$H(U, V) = \bigoplus_{U \in \text{End}_{\mathcal{C}}^e((V, +))} U$$

L'axiome (7) fait intervenir les couleurs de Kirby dont voici une définition :

**Définition 4.17.** Une combinaison linéaire formelle  $\Omega_g = \sum_i d(V_i)V_i$  est une couleur de Kirby de degré  $g \in G \setminus \mathcal{X}$  si  $\{V_i\}_i$  est un ensemble de représentants des  $\mathbb{Z}$ -orbites simples de  $\mathcal{C}_g$ .

**Remarque 4.18.** La condition (8) n'est pas vraiment nécessaire mais elle permet de simplifier la construction (elle n'intervient ci-après que pour la  $H$ -stabilisation).

**2.3. Les invariants  $N$  et  $N^0$ .** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $G$ -modulaire relativement à  $\mathcal{X}$  avec dimension modifiée  $d$  et groupe de périodicité  $\mathbb{Z}$ . Comme pour la catégorie  $\mathcal{C}^H$  des représentations de poids de  $U_q^H \mathfrak{sl}(2)$ , on définit les notions de triplet compatible, admissible et de présentation calculable.

**Définition 4.19.** Soit  $(M, T, \omega)$  un triplet où  $M$  une variété de dimension 3 orientée fermée,  $T \subset M$  un graphe en rubans (éventuellement vide)  $\mathcal{C}^H$ -colorié et  $\omega \in H^1(M \setminus T, G)$ .

- (1) Le triplet  $(M, T, \omega)$  est compatible si chaque arête  $e$  de  $T$  est coloriée par un élément de  $\mathcal{C}_{\omega(m_e)}$  où  $m_e$  est un méridien orienté de l'arête  $e$ .
- (2) Soit  $L \cup T \subset S^3$  où  $L$  est un entrelacs orienté dans  $S^3 \setminus T$  qui donne une présentation de  $(M, T)$  par chirurgie. La présentation  $L \cup T$  est calculable si pour chaque composante  $L_i$  de  $L$  dont on note par  $m_i$  le méridien, on a  $\omega(m_i) \notin \mathcal{X}$ .
- (3) Le triplet  $(M, T, \omega)$  est admissible s'il admet une présentation calculable ou si  $T$  possède une arête coloriée par un objet simple de l'idéal  $\text{Proj}$ .

Rappelons les mouvements de Kirby reliant les présentations par chirurgie de deux triplets compatibles difféomorphes et observons son effet sur la classe de cohomologie :

- (1) Le mouvement de Kirby de type I consiste à rajouter une composante de chirurgie qui est un noeud trivial d'auto-enlacement  $\pm 1$ . Le méridien de cette nouvelle composante borde un disque dans la 3-variété obtenue par chirurgie et toute classe de cohomologie prend la valeur 1 sur ce méridien.
- (2) Le mouvement de Kirby de type II (ou glissement d'anse) peut être décrit schématiquement par la figure suivante :

Dans cette figure, la composante circulaire noire représente une des composantes  $L_i$  de l'entrelacs de chirurgie  $L$ . Sa partie en pointillé signifie qu'elle peut être nouée arbitrairement

avec le reste de  $L$ . Dans la partie de droite, les deux brins en pointillés restent parallèles. L'autre brin noir représente une partie d'une arête de  $(L \cup T) \setminus L_i$ . Nous avons représenté en vert les méridiens de ces arêtes et indiqué la valeur de la classe de cohomologie sur ces méridiens.

Nous donnons une version adaptée du théorème de Kirby ([42]) :

**Théorème 4.20.** *Soient  $M_1, M_2$  deux variétés de dimension 3 orientées fermées, contenant des graphes en rubans  $T_1 \subset M_1$  et  $T_2 \subset M_2$ . Soit  $f : M_1 \rightarrow M_2$  un difféomorphisme direct tel que  $f(T_1) = T_2$ . Pour  $i = 1, 2$ , soit  $L_i$  un entrelacs dans  $S^3$  qui est une présentation par chirurgie de  $M_i$  tel que  $T_i \subset S^3 \setminus L_i$ . Alors il existe une suite finie de mouvement de Kirby de type I et II transformant  $L_1 \cup T_1$  en  $L_2 \cup T_2$  et induisant entre  $M_1 = S^3_{L_1}$  et  $M_2 = S^3_{L_2}$  un difféomorphisme isotope à  $f$ .*

Je décris maintenant la  $H$ -stabilisation que l'on considère comme une modification élémentaire d'un triplet compatible.

Soient  $(M_1, T_1, \omega_1)$  et  $(M_2, T_2, \omega_2)$  deux triplets compatibles et supposons qu'une arête  $e_1$  de  $T_1$  soit coloriée par le même objet de  $\mathcal{C}$  qu'une arête  $e_2$  de  $T_2$ . Alors on peut définir la somme connexe en bande  $(M_1, T_1, \omega_1) \#_{e_1, e_2} (M_2, T_2, \omega_2)$  comme la somme connexe de  $M_1$  et  $M_2$  obtenue en enlevant à  $M_1$  une boule que  $T_1$  intersecte le long d'un diamètre contenu dans  $e_1$  et en enlevant à  $M_2$  une boule que  $T_2$  intersecte le long d'un diamètre contenu dans  $e_2$ . Le résultat est une somme connexe en bande de  $T_1$  et  $T_2$  dans la 3-variété  $M_1 \# M_2$ . Le  $\mathcal{C}$ -coloriage et la classe de cohomologie de  $(M_1, T_1, \omega_1) \#_{e_1, e_2} (M_2, T_2, \omega_2)$  sont naturellement induits par ceux de  $(M_1, T_1, \omega_1)$  et  $(M_2, T_2, \omega_2)$ .

Si  $(M, T, \omega)$  est un triplet compatible, et si  $T$  possède une arête  $e$  coloriée par un objet simple de  $\text{Proj}$ , on peut considérer sa somme connexe en bande avec le triplet formé par un entrelacs de Hopf dans  $S^3$  dont les composantes sont coloriés par des objets simples de  $\text{Proj}$ . Le résultat est un triplet  $(M, T', \omega')$  où  $T'$  est obtenu à partir de  $T$  en ajoutant une composante qui est un méridien de l'une de ses arêtes. On dit que  $(M, T', \omega')$  est une  $H$ -stabilisation de  $(M, T, \omega)$  le long de  $e$ .

Étant donnée une présentation calculable  $L \cup T$  d'un triplet compatible  $(M, T, \omega)$ , on colorie les composantes de  $L$  par des couleurs de Kirby dont le degré est donné par la classe de cohomologie comme dans la section précédente pour obtenir un graphe en rubans  $\mathcal{C}$ -colorié  $L_\omega \cup T$ . On peut alors montrer dans ce contexte le même énoncé qu'au théorème 4.12 :

**Théorème 4.21.**

*Soit  $(M, T, \omega)$  un triplet compatible admettant une présentation calculable  $L \cup T \subset S^3$ . Soit  $(n_+, n_-)$  la signature de la matrice d'enlacement de  $L$ . Alors*

$$N(M, T, \omega) = \frac{F'(L_\omega \cup T)}{\Delta_+^{n_+} \Delta_-^{n_-}}$$

*ne dépend que de la classe de difféomorphisme direct du triplet  $(M, T, \omega)$ .*

DÉMONSTRATION. Je ne donne que quelques idées de cette démonstration. Tout d'abord, disons de manière grossière que deux couleurs de Kirby de même degré ne diffèrent que par le produit tensoriel par des objets  $\varepsilon^t$ . Les relations d'écheveaux satisfaites par des entrelacs coloriés par les objets  $\varepsilon^t$ , et notamment la condition 3 de la définition 4.16 permettent de montrer que  $F'$  n'est pas sensible à l'ajout de ces modules sur les composantes de chirurgie. On obtient ainsi, l'indépendance du résultat par rapport au choix des couleurs de Kirby.

Ensuite on montre que  $F'$  prend la même valeur sur deux présentations calculables reliées par un mouvement de Kirby de type II. On pourrait penser que deux présentations calculables sont reliées par des mouvements de Kirby parmi les présentations calculables, mais ce n'est a priori pas vrai. La démonstration ajoute à ces mouvements la  $H$ -stabilisation qui modifie la valeur de  $F'$  de

manière contrôlée. Avec ce mouvement supplémentaire, on peut relier deux présentations calculables parmi les présentations calculables. La variation de  $F'$  entre les deux présentations calculables se réduit finalement à une fonction du nombre algébrique de mouvements de Kirby de type  $I$  et est compensée par le facteur  $\Delta_+^{n_+} \Delta_-^{n_-}$ .  $\square$

**Proposition 4.22.** *Si  $(M, T, \omega)$  est un triplet compatible et si  $T$  possède une arête coloriée par un objet simple de Proj, alors il existe une  $H$ -stabilisation de  $(M, T, \omega)$  ayant une présentation calculable.*

DÉMONSTRATION. L'idée de la démonstration de cette proposition est, partant d'une présentation quelconque, de modifier celle-ci en utilisant le mouvement de Kirby de type II pour modifier les valeurs de la classe de cohomologie sur les méridiens des composantes de chirurgie. Ici, l'axiome 4 de la définition 4.16 est utilisé pour montrer que l'on peut ainsi obtenir une présentation calculable pourvu que l'on ait choisi correctement l'objet colorant l'entrelacs de Hopf utilisé dans la  $H$ -stabilisation.  $\square$

On étend alors l'invariant  $N$  aux triplets admissibles de la manière suivante

**Théorème 4.23.** *Il existe une unique façon d'étendre  $N$  aux triplets admissibles de sorte que si  $(M_1, T_1, \omega_1) \mathfrak{b}_{e_1, e_2} (M_2, T_2, \omega_2)$  est une somme connexe en bande le long d'arêtes coloriées par un objet simple projectif  $V$ , alors*

$$N((M_1, T_1, \omega_1) \mathfrak{b}_{e_1, e_2} (M_2, T_2, \omega_2)) = d(V)^{-1} N(M_1, T_1, \omega_1) N(M_2, T_2, \omega_2)$$

Pour finir, l'invariant  $N^0$  est défini par le même énoncé que dans le théorème 4.14

**Théorème 4.24.** *Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble de tous les triplets compatibles. Il existe un unique invariant  $N^0 : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  tel que pour tout triplet compatible  $(M, T, \omega) \in \mathcal{M}$  et pour tout triplet admissible  $(M', T', \omega') \in \mathcal{M}^a$ , on ait : si  $(M, T, \omega) \# (M', T', \omega') \in \mathcal{M}^a$ , alors*

$$N((M, T, \omega) \# (M', T', \omega')) = N(M', T', \omega') \cdot N^0(M, T, \omega) \tag{47}$$



## Autres travaux

### 1. L'application cheveux

L'intégrale de Kontsevich  $Z$  est un invariant rationnel de type fini universel pour les noeuds. L'image par  $Z$  d'un noeud  $K$  appartient à un espace vectoriel  $\mathbb{N}$ -gradué de dimension infini donné par une présentation. Les générateurs de cet espace sont des diagrammes de Feynman. Rozansky a conjecturé que  $Z(K)$  appartient à l'image de l'application «cheveux» : On peut définir un espace engendré par des diagrammes de Feynman avec perles. Ces perles sont une décoration des arêtes des diagrammes par des entiers. L'application «cheveux»  $H$  substitue à ces perles des arêtes, produisant des séries formelles de diagrammes de Feynman. Kriker a prouvé la conjecture de Rozansky puis a montré directement avec Garoufalidis l'existence d'un invariant de noeuds  $Z^{rat}$  à valeur dans l'espace engendré par des diagrammes de Feynman avec perles. On peut donc factoriser l'intégrale de Kontsevich  $Z(K) = H \circ Z^{rat}(K)$ .

Rozansky, Garoufalidis et Kriker ont conjecturé que  $H$  pourrait être injective (et donc  $Z^{rat}$  déterminée par  $Z$ ). Dans [54], nous montrons que ce n'est pas le cas. Nous utilisons un diviseur de zéro découvert par Vogel dans son algèbre  $\Lambda$  (cf [68]) pour construire un élément dans le noyau de l'application  $H$ . Nous introduisons une graduation sur les espaces de diagrammes de Feynman avec perles pour prouver que cet élément est non nul.

### 2. Invariants quantiques d'entrelacs associés aux super algèbres de Lie $\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}$

Cette partie décrit une renormalisation d'invariants quantiques antérieure à la découverte des traces modifiées.

Le premier exemple intéressant de catégorie monoïdale non semi-simple que j'ai étudié est celui des représentations de la quantification des super algèbres de Lie  $\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}$  (voir l'article [55]). Cette famille de super algèbres de Lie est introduite par Kac (cf [36]) dans sa classification des super algèbres de Lie simples. Elle dépend du paramètre  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$ . La notation évoque une déformation de la super algèbre de Lie  $\mathfrak{osp}(4, 2)$  obtenue lorsque  $\alpha \in \{-2, -\frac{1}{2}, 1\}$ . Vogel ([68]) utilise  $\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}$  pour montrer que tous les invariants de type fini des entrelacs ne proviennent pas des algèbres de Lie semi-simples.

Il existe deux approches pour calculer des invariants quantiques d'entrelacs dans  $S^3$  associés à une super algèbre de Lie. La première passe par l'utilisation de l'intégrale de Kontsevich-Drinfeld, l'autre par les quantifications à la Drinfeld-Jimbo. Dans les deux cas, des invariants numériques sont obtenus par le biais d'une représentation soit de la super algèbre de Lie, soit de sa quantification. Dans l'article [55], nous considérons ces deux méthodes pour la représentation adjointe  $L$  de l'algèbre de Lie et sa déformation quantique  $L_h$ .

Pour la première approche, nous définissons d'abord une spécialisation  $Z_{ad}$  de la construction de Kontsevich-Drinfeld universelle pour les invariants quantiques associés à la représentation adjointe d'une (super)algèbre de Lie :

Nous considérons des 3-graphes qui sont des graphes finis dont les sommets sont univalents ou trivalents et rigides, c'est-à-dire qu'ils sont munis de la donnée à chaque sommet trivalent d'un ordre cyclique sur les arêtes issues de ce sommet. Appelons 3-graphe noué un plongement d'un 3-graphe

en bande dans  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $G(p, q)$  l'ensemble des classes d'isotopie de 3-graphes noués plongés dans  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  dont l'ensemble des sommets univalents est  $\{1, \dots, p\} \times \{0\} \times \{0\} \cup \{1, \dots, q\} \times \{0\} \times \{1\}$ . Pour chaque paire d'entiers naturels, l'application

$$Z_{\text{ad}} : G(p, q) \rightarrow D(p, q)$$

associe à un élément de  $G(p, q)$  une série de 3-graphes représentant un élément de  $D(p, q)$  :  $D(p, q)$  est le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par des 3-graphes ayant  $p + q$  sommets univalents indexés par les éléments de  $\{1, \dots, p\} \sqcup \{1, \dots, q\}$  soumis aux relations AS et IHX.

En appliquant la fonction de poids  $\Phi$  associée à  $\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}$

$$\Phi : D(p, q) \rightarrow \text{Hom}_L(L^{\otimes p}, L^{\otimes q})$$

(cf [68]) il est alors possible de calculer des invariants numériques.

Disons qu'un *vrai 3-graphe* est un 3-graphe ayant au moins un sommet trivalent et qu'un 3-graphe est *fermé* s'il n'a pas de sommets univalents. Soit  $Z_{\mathfrak{D}_{21}} = \Phi \circ Z_{\text{ad}}$ , alors on montre que  $Z_{\mathfrak{D}_{21}}$  ne dépend pas de la structure en bande des 3-graphes noués. De plus  $Z_{\mathfrak{D}_{21}}$  s'annule sur tout vrai 3-graphe fermé et vaut 1 sur tout entrelacs.

La méthode pour récupérer de l'information sur les 3-graphes noués fermés consiste alors à construire une application  $f : D(0, 0) \rightarrow D(0, 3)$  puis à appliquer  $\Phi$  au résultat. L'application  $f$  est obtenue essentiellement en modifiant un 3-graphe par la suppression d'un de ses sommets trivalents. Une telle opération est légitimée par les structures algébriques sur les espaces  $D(p, q)$  décrites par Vogel ([68]). Ainsi on construit un invariant

$$\widetilde{Z}_{\mathfrak{D}_{21}} : D(0, 0) \rightarrow R$$

à valeurs dans les séries symétriques en trois variables de somme nulles

$R = \mathbb{Q}[[a_1, a_2, a_3]]_{(a_1+a_2+a_3)}^{S_3}$  (les deux paramètres libres proviennent l'un d'une graduation et l'autre du paramètre  $\alpha$  de  $\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}$ ).

Pour tout élément  $T$  de  $G(0, 3)$ , on a la relation

$$Z_{\mathfrak{D}_{21}} \left( \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \text{T} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right) = \widetilde{Z}_{\mathfrak{D}_{21}} \left( \left\langle \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \text{T} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\rangle \right) \cdot Z_{\mathfrak{D}_{21}} \left( \ominus \right).$$

Cette approche demande peu d'efforts mais est difficilement calculable. En effet, le calcul de  $Z_{\text{ad}}$  fait intervenir l'associateur de Drinfeld rationnel pour lequel il n'y a pas à ma connaissance de formule explicite (l'associateur original de Drinfeld est explicite à valeurs complexes mais il n'est guère manipulable car sa formule utilise les fonctions polyzêtas).

Par l'approche quantique, on construit un invariant similaire et calculable. Cependant la preuve de l'existence de l'invariant demande plus de travail. Il existe une version quantifiée  $U_h \mathfrak{D}_{2,1,\alpha}$  décrite par Y. M. Zou et H. Thys (cf [72] et [60]). Thys donne une formule explicite pour sa  $R$ -matrice universelle.  $U_h \mathfrak{D}_{2,1,\alpha}$  possède une unique représentation  $L_h$  qui est une déformation de la représentation adjointe  $L$  de  $\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}$ . On vérifie qu'il existe, à un scalaire près, une unique application  $L_h \otimes L_h \rightarrow L_h$  qui est une déformation du crochet de Lie. En utilisant cette représentation, ce morphisme et la construction de Reshetikhin-Turaev, on obtient directement une application

$$Q_{\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}} : G(p, q) \rightarrow \text{Hom}_{U_h \mathfrak{D}_{2,1,\alpha}}(L_h^{\otimes p}, L_h^{\otimes q})$$

et en particulier  $Q_{\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}} : G(0, 0) \rightarrow \mathbb{C}[[h]]$ . On montre alors que comme  $Z_{\mathfrak{D}_{21}}$ ,  $Q_{\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}}$  est trivial sur les 3-graphes fermés. Il est alors possible d'imiter la construction de  $\widetilde{Z}_{\mathfrak{D}_{21}}$  pour les vrais 3-graphes noués : Il existe un unique invariant de vrais 3-graphes noués fermés  $Q_{\mathfrak{D}_{2,1}}$ , à valeurs dans l'anneau



des fractions rationnelles  $\mathbb{Q}(q_1, q_2)$  défini par la propriété : pour tout  $T \in G(0, 3)$ ,

$$Q_{\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}} \left( \begin{array}{c} \boxed{\text{T}} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right) = \widetilde{Q_{\mathfrak{D}_{2,1}}} \left( \begin{array}{c} \boxed{\text{T}} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right) \Big|_{q_1=e^h, q_2=e^{\alpha h}} \cdot Q_{\mathfrak{D}_{2,1,\alpha}} \left( \ominus \right).$$

$\widetilde{Q_{\mathfrak{D}_{2,1}}}(N)$  peut être calculé en utilisant la relation ci-dessus mais celle-ci particularise un sommet trivalent de  $N$ . La démonstration de l'existence de  $\widetilde{Q_{\mathfrak{D}_{2,1}}}$  revient à établir l'indépendance du résultat par rapport à ce choix.

Pour obtenir un invariant d'entrelacs, on fait ensuite artificiellement apparaître un sommet trivalent en utilisant une relation « skein » satisfaite par  $\widetilde{Q_{\mathfrak{D}_{2,1}}}$ . On montre qu'il existe un invariant d'entrelacs en bande  $\overline{Q}$  s'annulant sur les entrelacs triviaux et déterminé par

$$\overline{Q} \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) - \overline{Q} \left( \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right) = \widetilde{Q_{\mathfrak{D}_{2,1}}} \left( \begin{array}{c} | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} + \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right) \right)$$

$\overline{Q}$  est en fait d'abord défini pour des noeuds singuliers à un point double puis on l'intègre en un invariant d'entrelacs en utilisant un résultat de Stanford décrivant l'obstruction à ce processus.

Finalement, on montre que ces invariants partagent certaines valeurs, obtenues par spécialisation des variables, avec certains câblages des polynômes de HOMFLY-PT et de Kauffman.



## Bibliographie

- [1] Y. Akutsu, T. Deguchi, T. Ohtsuki - *Invariants of colored links*. J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), no. 2, 161-184.
- [2] J. Barrett, B. Westbury - *Invariants of piecewise-linear 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 3997-4022.
- [3] J.W. Barrett, B.W. Westbury - *Spherical categories*. Adv. Math. **143** (1999), no. 2, 357–375.
- [4] S. Baseilhac, R. Benedetti - *Quantum hyperbolic invariants of 3-manifolds with  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ -characters*. Topology **43** (2004), no. 6, 1373–1423.
- [5] S. Baseilhac, R. Benedetti, - *Quantum hyperbolic geometry*, Alg. Geom. Topol. **7** (2007) 845–917.
- [6] J. Bichon - *Cosovereign Hopf algebras*, J. Pure Appl. Algebra **157**, No.2-3 (2001), 121-133.
- [7] L.C. Biedenharn, J.D. Louck - *Angular momentum in quantum physics*. Theory and application. With a foreword by Peter A. Carruthers. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 8. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981.
- [8] B. Boe, J. Kujawa, D. Nakano - *Complexity for modules over the classical Lie superalgebra  $\mathfrak{gl}(m|n)$* , prépublication à paraître dans Compositio Math.
- [9] R. Brown - *Groupoids and van Kampen's theorem*, Proc. London Math. Soc. (3) **17** 1967 385–401.
- [10] V. Chari, A. Pressley - *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [11] F. Costantino, N. Geer, B. Patureau-Mirand - *Quantum invariants of 3-manifolds via link surgery presentations and non-semi-simple categories*. prépublication, arXiv :1202.3553.
- [12] F. Costantino, J. Murakami - *On  $SL(2, \mathbb{C})$  quantum 6j-symbols and its relation to the hyperbolic volume*. prépublication à paraître dans Quantum Topology, arXiv :1005.4277.
- [13] F. Costantino, D. Thurston - *3-manifolds efficiently bound 4-manifolds.*, J. Topol, **1** (2008), no. 3, 703–745.
- [14] C. De Concini, V.G. Kac - *Representations of quantum groups at roots of 1*. In *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory*. (Paris, 1989), 471–506, Progr. Math., **92**, Birkhauser Boston, 1990.
- [15] C. De Concini, V.G. Kac, C. Procesi - *Quantum coadjoint action*. J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 1, 151–189.
- [16] C. De Concini, V.G. Kac, C. Procesi - *Some remarkable degenerations of quantum groups*. Comm. Math. Phys. **157** (1993), no. 2, 405–427.
- [17] C. De Concini, C. Procesi, N. Reshetikhin, M. Rosso - *Hopf algebras with trace and representations*. Invent. Math. **161** (2005), no. 1, 1–44.
- [18] V.G. Drinfel'd - *Quantum groups*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [19] N. Geer, R.M. Kashaev, V. Turaev - *Tetrahedral forms in monoidal categories and 3-manifold invariants*, prépublication arXiv :1008.3103.
- [20] N. Geer, J. Kujawa, B. Patureau-Mirand - *Generalized trace and modified dimension functions on ribbon categories* prépublication à paraître dans Proc. Amer. Math. Soc. arXiv :1001.0985.
- [21] N. Geer, J. Kujawa, B. Patureau-Mirand - *Ambidextrous objects and trace functions for non-semi-simple categories*. prépublication arXiv :1106.4477.
- [22] N. Geer, B. Patureau-Mirand - *Multivariable link invariants arising from  $\mathfrak{sl}(2|1)$  and the Alexander polynomial*. J. Pure Appl. Algebra **210** (2007), no. 1, 283–298.
- [23] N. Geer, B.Patureau-Mirand - *Multivariable link invariants arising from Lie superalgebras of type I*. J. Knot Theory Ramifications **19** (2010), no. 1, 93–115.

- [24] N. Geer, B. Patureau-Mirand - *On the Colored HOMFLY-PT, Multivariable and Kashaev Link Invariants*. Commun. Contemp. Math. 10 (2008), no. 1 supp, 993-1011.
- [25] N. Geer, B. Patureau-Mirand - *An invariant trace for the category of representations of Lie superalgebras*, Pacific J. Math. **238** (2008), no. 2, 331–348.
- [26] N. Geer, B. Patureau-Mirand - *Polynomial 6j-Symbols and States Sums*. Algebraic & Geometric Topology 11 (2011) 1821–1860.
- [27] N. Geer, B. Patureau-Mirand - *Topological invariants from non-restricted quantum groups*. prépublication arXiv :1009.4120.
- [28] N. Geer, B. Patureau-Mirand, V. Turaev - *Modified quantum dimensions and re-normalized link invariants*. Compos. Math. **145** (2009), no. 1, 196–212.
- [29] N. Geer, B. Patureau-Mirand, V. Turaev - *Modified 6j-symbols and 3-Manifold Invariants*. prépublication à paraître dans Adv. Math. arXiv :0910.1624.
- [30] N. Geer, B. Patureau-Mirand, A. Virelizier - *Traces on ideals in pivotal categories*. prépublication à paraître dans Quantum Topol. arXiv :1103.1660.
- [31] A. Hatcher - *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [32] V. Jones - *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 12 (1985), no. 1, 103–111.
- [33] A. Joyal, R. Street - *Braided tensor categories*. Adv. Math. 102 (1993), no. 1, 20–78.
- [34] R.M. Kashaev - *A link invariant from quantum dilogarithm*. Modern Phys. Lett. A **10** (1995), no. 19, 1409–1418.
- [35] Kashaev, R., Quantum dilogarithm as a 6j-symbol. *Modern Phys. Lett. A* **9** (1994), no. 40, 3757–3768.
- [36] V.G. Kac - *Lie superalgebras*. Advances Math. 26 (1977), 8–96.
- [37] V.G. Kac - *Representations of classical Lie superalgebras*. Differential geometrical methods in mathematical physics, II (Proc. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1977), pp. 597–626, Lecture Notes in Math., 676, Springer, Berlin, 1978.
- [38] V.G. Kac, M. Wakimoto - *Integrable highest weight modules over affine superalgebras and number theory*, Progr. Math., 123, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994, 415–456.
- [39] C. Kassel - *Quantum Groups*, volume 155 of GTM. Springer-Verlag, 1994.
- [40] L.H. Kauffman, H. Saleur - *Free fermions and the Alexander-Conway polynomial*. Comm. Math. Phys. **141** (1991), no. 2, 293–327.
- [41] S.M. Khoroshkin, V.N. Tolstoy - *Universal R-matrix for quantized (super)algebras*. Comm. Math. Phys. **141** (1991), no. 3, 599–617.
- [42] R. Kirby - *A calculus for framed links*. Invent. Math. 45 (1978), 35-56.
- [43] A.N. Kirillov, N.Yu. Reshetikhin - *Representations of the algebra  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ ,  $q$ -orthogonal polynomials and invariants of links*. Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988), Adv. Ser. Math. Phys., 7, 285–339.
- [44] J. Kujawa - *The generalized Kac-Wakimoto conjecture and support varieties for the Lie superalgebra  $osp(m-2n)$* . prépublication arXiv :1112.3384.
- [45] J.R. Links, M. Gould - *Two variable link polynomials from quantum supergroups*. Lett. Math. Phys. **26** (1992), no. 3, 187–198.
- [46] S. Mac Lane - *Natural associativity and commutativity*, Rice Univ. Stud. 49 (1963) 28-46.
- [47] S. Majid - *Foundations Of Quantum Group Theory*, Cambridge, UK. Univ. Pr. (1995).
- [48] G. Maltsiniotis, Traces dans les catégories monoïdales, dualité et catégories monoïdales fibrées [Traces in monoidal categories, duality and fibered monoidal categories], *Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég.* **36** (1995), 195–288.
- [49] G. Masbaum, P. Vogel, - *3-valent graphs and the Kauffman bracket*, Pacific J. Math. 164 (1994), no. 2, 361–381.
- [50] H. Murakami, J. Murakami - *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*. Acta Math. 186 (2001), no. 1, 85–104.
- [51] W. Neumann, Combinatorics of triangulations and the Chern–Simons invariant for hyperbolic 3-manifolds, in : Topology '90 (Columbus, OH, 1990), De Gruyter, Berlin, 1992.

- [52] W. Neumann, Hilbert's 3rd problem and invariants of 3-manifolds, *Geometry and Topology Monographs*, Vol. 1, The Epstein Birthday Schrift, Paper No 19, 1998, pp. 383–411.
- [53] T. Ohtsuki - *Quantum invariants. A study of knots, 3-manifolds, and their sets*. Series on Knots and Everything, **29**. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002.
- [54] B. Patureau-Mirand - *Non injectivity of the "Hair" map*. Algebraic & Geometric Topology 12 (2012) 415–420.
- [55] B. Patureau-Mirand - *Quantum Link Invariant from the Lie Superalgebras  $D(2|1, \alpha)$* . Algebraic & Geometric Topology 6 (2006) 329–349.
- [56] R. Penrose - *Applications of negative dimensional tensors*. 1971 Combinatorial Mathematics and its Applications (Proc. Conf., Oxford, 1969) pp. 221–244 Academic Press, London.
- [57] N. Reshetikhin, V. Turaev - *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*. Comm. Math. Phys. **127** (1990), no. 1, 1–26.
- [58] N. Reshetikhin, V. Turaev - *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*. Invent. Math. **103** (1991), no. 3, 547–597.
- [59] V. Serganova - *On superdimension of an irreducible representation of a basic classical lie superalgebra*. Super-symmetry in Mathematics and Physics, Springer LNM, editors S. Ferrara, R. Fioresi, V.S. Varadarajan (2011), to appear.
- [60] H. Thys - *R-matrice universelle pour  $U_h(D(2,1,x))$  et invariant d'entrelacs associé* Bull. Soc. Math. Fr. 130, No.2, 309–336 (2002).
- [61] V.G. Turaev - *Reidemeister torsion in knot theory*. [J] Russ. Math. Surv. 41, No.1, 119–182 (1986). (English translation of Uspekhi Mat. Nauk 41 (1986), no. 1(247), 97–147, 240.)
- [62] V.G. Turaev - *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*. de Gruyter Studies in Mathematics, 18. Walter de Gruyter & Co., Berlin, (1994).
- [63] V.G. Turaev - *Homotopy Quantum Field Theory*. European Mathematical Society (2010).
- [64] V.G. Turaev, O. Viro - *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*. Topology **31** (1992), no. 4, 865–902.
- [65] V.G. Turaev, H. Wenzl - *Quantum invariants of 3-manifolds associated with classical simple Lie algebras*. Internat. J. Math. **4** (1993), no. 2, 323–358.
- [66] V. Vassiliev - *Cohomology of knot spaces, Theory of singularities and its applications* (V. I. Arnold, ed), Amer. Math. Soc., Providence 1990.
- [67] O. Viro - *Quantum relatives of the Alexander polynomial*. Algebra i Analiz 18 (2006), no. 3, 63–157; translation in St. Petersburg Math. J. 18 (2007), no. 3, 391–457.
- [68] P. Vogel - *Algebraic structures on modules of diagrams*, J. Pure Appl. Algebra 215 (2011), no. 6, 1292–1339.
- [69] D. De Wit, A. Ishii, J.R. Links - *Infinitely many two-variable generalisations of the Alexander-Conway polynomial*. Algebr. Geom. Topol. 5 (2005), 405–418.
- [70] E. Witten - *Quantum field theory and the Jones polynomial*. Comm. Math. Phys., 121, vol.3, (1989), 351–399.
- [71] H. Yamane - *Quantized enveloping algebras associated with simple Lie superalgebras and their universal R-matrices*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **30** (1994), no. 1, 15–87.
- [72] Y.M. Zou - *Deformation of the universal enveloping algebra of  $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$* , Canadian Math. Bull., Vol 39(4)(1996), 499–506.