Caractères sur l'algèbre de diagrammes Λ
Characters on the algebra of diagrams Λ

Bertrand Patureau-Mirand
U.F.R. de Mathématiques
Université Paris 7
2, place Jussieu
75251 paris cedex 05
email : patureau@@math.jussieu.fr

5 octobre 2000

Résumé

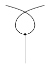
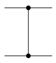
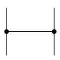
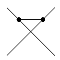
La théorie des invariants de Vassiliev met en jeu plusieurs modules de diagrammes sur lesquels opère une algèbre Λ définie par Pierre Vogel dans [8]. La donnée d'une superalgèbre de Lie simple quadratique L fournit un caractère sur Λ. On montre la cohérence de ces caractères en construisant un morphisme d'algèbres graduées entre Λ et un quotient d'un anneau de polynômes à trois variables qui factorise tous les caractères induits par les superalgèbres de Lie simples. En particulier, on montre que les caractères correspondants à la superalgèbre de Lie $\mathfrak{f}(4)$ de dimension 40 et à $\mathfrak{sl}_3$ sont identiques.

The theory of Vassiliev invariants deals with many modules of diagrams on which the algebra Λ defined by Pierre Vogel in [8] acts. By specifying a quadratic simple Lie superalgebra, one obtains a character on Λ. We show the coherence of these characters by building a map of graded algebras beetwen Λ and a quotient of a ring of polynomials in three variables; all the characters induced by simple Lie superalgebras factor through this map. In particular, we show that the characters for the Lie superalgebra $\mathfrak{f}(4)$ with dimension 40 and for $\mathfrak{sl}_3$ are the same.

L'objet de cette note est d'annoncer le résultat du théorème 1. La rédaction complète de sa démonstration sera incluse dans ma thèse de doctorat à l'université Paris 7.

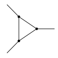
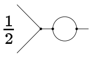
1 Les diagrammes trivalents :

Modules de diagrammes. Soit X un ensemble fini ; un (X)-diagramme est un graphe fini K dont tous les sommets sont trivalents ou univalents, muni d'un isomorphisme entre X et les sommets univalents de K et pour lequel on s'est donné en chaque sommet trivalent x de K, un ordre cyclique sur l'ensemble des trois arêtes arrivant en x.
On peut représenter un (X)-diagramme par un graphe immergé dans le plan de manière à ce que l'ordre cyclique en chaque sommet soit donné par l'orientation du plan.
On note $\bar{F}_X$ (respectivement F_X) le quotient du $\mathbb{C}$-espace vectoriel ayant pour base l'ensemble des (X)-diagrammes (respectivement des (X)-diagrammes connexes ayant au moins un sommet trivalent) par les relations suivantes :

AS :  $+$  $\equiv 0$ $\quad IHX$:  $\equiv$  $-$ 

Chacune de ces relations fait intervenir deux ou trois diagrammes identiques hors du morceau représenté. Les modules ainsi définis sont gradués, le degré d'un diagramme étant donné par 1 moins sa caractéristique d'Euler.
Enfin on notera $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$ et F_n pour $F_{[n]}$. On remarquera que toute bijection entre des ensembles finis X et Y induit une bijection entre F_X et F_Y. Ainsi le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère sur F_n et le sous module des points fixes pour cette action est isomorphe à l'espace des invariants de Vassiliev primitifs (cf [1] et [7]).

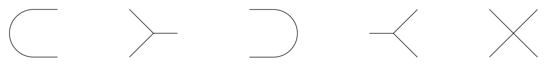
L'algèbre Λ. Elle est définie comme le sous espace vectoriel formé des éléments de F_3 totalement antisymétriques sous l'action du groupe $\mathfrak{S}_3$.
L'algèbre Λ est naturellement munie d'une structure d'algèbre commutative et agit sur chaque module F_X. Si $u \in \Lambda$ et $K \in F_X$ est un diagramme, un diagramme représentant $u.K$ est obtenu en insérant u au niveau d'un sommet trivalent de K.
En particulier, F_0 et F_2 sont des Λ-modules libres de rang 1. D'autre part, l'algèbre Λ possède, à un scalaire près, un seul élément de degré 1 noté t :

$t =$  $= \frac{1}{2}$ 

2 Fonction de poids associée à une superalgèbre de Lie :

Le foncteur Φ_L. Soit L une superalgèbre de Lie simple quadratique (munie d'un élément de Casimir $\Omega \in L \otimes L$). Soit $\mathcal{D}$ la catégorie $\mathbb{C}$-linéaire monoïdale définie

par :
$$Obj(\mathcal{D}) = [n],n \in \mathbb{N} \qquad \mathcal{D}([p],[q]) = \bar{F}_{[p]\amalg[q]}$$
La composition d'un diagramme de $[p]$ vers $[q]$ avec un diagramme de $[q]$ vers $[r]$ est donnée par leur réunion au-dessus de $[q]$ (on les recolle en identifiant les sommets monovalents de même index des deux ensembles $[q]$). Le produit tensoriel $[p] \otimes [q]$ vaut $[p+q]$ et celui de deux diagrammes est donné par l'image de leur réunion disjointe en utilisant les isomorphismes $[p] \amalg [q] \simeq [p+q]$ obtenus en augmentant de p chaque élément de $[q]$.
Soit $\mathcal{L}_L$ la catégorie $\mathbb{C}$-linéaire monoïdale définie par :
$$Obj(\mathcal{L}_L) = L^{\otimes n},n \in \mathbb{N} \qquad \mathcal{L}_L(L^{\otimes p},L^{\otimes q}) = Hom_L(L^{\otimes p},L^{\otimes q})$$
Il existe un unique foncteur $\mathbb{C}$-linéaire monoïdal Φ_L de la catégorie $\mathcal{D}$ vers la catégorie $\mathcal{L}_L$ envoyant $[n]$ sur $L^{\otimes n}$ et les diagrammes suivants :



vers, respectivement, le Casimir Ω, le crochet de Lie, le produit scalaire associé au Casimir, le dual du crochet de Lie et l'opérateur de symétrie. D'autre part, il existe un unique morphisme d'algèbres graduées $\chi_L : \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}[x]$ vérifiant :
$$\forall u \in \Lambda, \forall K \in F_{[p]\amalg[q]}, \Phi_L(uK) = \chi_L(u)_{|x=1}\Phi_L(K)$$
(Ces résultats sont établis dans [8]).

Propriétés communes à tous les foncteurs Φ_L. On connaît la liste complète des superalgèbres de Lie simples complexes quadratiques (cf [2] et [8]). Elle est formée des superalgèbres $\mathfrak{sl}(V)$ où V est un superespace de superdimension non nulle, des superalgèbres $\mathfrak{psl}(V)$ si V est de superdimension nulle, des superalgèbres $\mathfrak{osp}(V)$ lorsque V est muni d'une forme bilinéaire supersymétrique non dégénérée, les superalgèbres $\mathfrak{D}_{21\delta}$ où δ est un paramètre complexe différent de 0 et de 1, les cinq algèbres exceptionnelles, les deux superalgèbres $\mathfrak{g}(3)$ et $\mathfrak{f}(4)$ et enfin les superalgèbres hamiltoniennes. Nous exclurons ces dernières qui induisent sur Λ le caractère trivial (cf [8]).

L'action du Casimir Ω de L sur $L^{\otimes n}$ s'exprime comme l'image par Φ_L d'un élément de $\mathcal{D}([n],[n])$. Sous l'action du Casimir, le module $L^{\otimes n}$ se scinde en espaces propres sur lesquels Ω agit comme un scalaire. En particulier, il est facile de voir que Ω agit par $2t$ sur L (où l'on note encore t le scalaire $\chi_L(t)_{|x=1}$).
Sur $L^{\otimes 2}$, le casimir agit comme $4t - 2\Psi$, où Ψ est l'image par Φ_L du diagramme 
Le module $E = S^2L_{/\Omega}$ se décompose en trois espaces propres et les valeurs propres

associées α,β,γ ont pour somme t. Certains des modules cités ci-dessus peuvent éventuellement être nuls mais il existe toujours des éléments $s(L)=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ et $p(L)=\alpha\beta\gamma$ tels que sur E on ait la relation :

$$\Psi^3 = t\Psi^2 - s\Psi + p \tag{1}$$

Le triplet $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$ sera dit admissible pour (L,Ω) si l'équation (1) est vérifiée. La correspondance entre superalgèbres et triplets n'est pas univoque : Par exemple, si $L=\mathfrak{sl}_2$, E est simple, Ψ y vaut $-t$ et il existe donc une infinité de triplets admissibles; mais encore, des superalgèbres distinctes peuvent avoir les mêmes triplets admissibles, c'est le cas pour $\mathfrak{sl}_2$ et $\mathfrak{g}(3)$ et pour $\mathfrak{sl}_3$ et $\mathfrak{f}(4)$. Cependant, on peut remarquer que l'ensemble de tous les triplets admissibles se trouve sur cinq réunions de droites de $\mathbb{P}(\mathbb{C}[\alpha,\beta,\gamma])$: à permutation près de α,β,γ, les triplets admissibles pour $\mathfrak{sl}(V)$ et $\mathfrak{psl}(V)$ se trouvent sur la droite $\alpha+\beta=0$, ceux admissibles pour $\mathfrak{osp}(V)$ sur la droite $\alpha+2\beta=0$, ceux pour $\mathfrak{D}_{21\delta}$ sont sur $t=0$; dans les cas exceptionnels, ils se trouvent sur $\alpha+\beta=\frac{1}{3}t$ et dans le cas $\mathfrak{sl}_2$, ils sont sur la droite $t+\alpha=0$.

Dans la suite, on note $S=\mathbb{C}[t,s,p]$ l'anneau des polynômes à trois indéterminées de degré respectif 1, 2 et 3. Si L est une superalgèbre de Lie quadratique munie d'un triplet admissible, on pose $I_L=Ker(f_L)$ où f_L est le morphisme d'algèbres graduées de S dans $\mathbb{C}[x]$ qui envoie les indéterminées t, s et p sur leurs valeurs respectives $t(L)x$, $s(L)x^2$ et $p(L)x^3$ dans $\mathbb{C}[x]$. Le résultat principal de cette note est le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit $I=\bigcap_L I_L$, alors il existe un unique caractère gradué $\chi:\Lambda\longrightarrow S_{/I}$ tel que, pour toute superalgèbre de Lie quadratique L munie d'un triplet admissible, on ait :*

$$\chi_L = f_L\circ\chi$$

Remarque : On note S' la sous algèbre graduée de S somme de $\mathbb{C}[t]$ et de l'idéal de S engendré par le polynôme $p+st+2t^3$ (les triplets admissibles pour $\mathfrak{sl}_2$ correspondent aux valeurs de t, s et p pour lesquelles ce polynôme est nul). Les calculs de [3] montrent l'existence d'un morphisme d'algèbres graduées de S' vers Λ. Sa composée avec χ est le morphisme quotient.

3 Les cas de $\mathfrak{g}(3)$ et de $\mathfrak{f}(4)$:

Pour démontrer le théorème 1, il fallait vérifier que les caractères induits par $\mathfrak{g}(3)$ et $\mathfrak{f}(4)$ sont les mêmes que ceux induits par $\mathfrak{sl}_2$ et $\mathfrak{sl}_3$. La démonstration de ce fait est simple pour $\mathfrak{g}(3)$, mais elle l'est moins pour $\mathfrak{f}(4)$. Cette section en esquisse la preuve :

Supposons qu'une superalgèbre de Lie L munie d'un élément de Casimir non dégénéré $\Omega \in L \otimes L$ contienne une sous algèbre de Lie l sur laquelle la forme bilinéaire supersymétrique de L ne soit pas dégénérée. Alors, comme l-module, $L = l \oplus E$, E étant l'orthogonal de l dans L, et le Casimir de L se décompose en $\Omega = \omega + \pi$, avec $\omega \in l \otimes l$ et $\pi \in E \otimes E$. On supposera de plus que $[E,E]_L \subset l$.

Théorème 2 *Si L est comme ci-dessus, et que de plus $E = \bigoplus_i E_i$ où les E_i sont des l-modules de superdimension nulle vérifiant $End_l(E_i) = \mathbb{C}$, alors Φ_L et Φ_l induisent la même forme linéaire sur F_0.*
La superalgèbre de Lie $\mathfrak{f}(4)$ satisfait aux conditions ci-dessus pour $l = \mathfrak{sl}(4{,}1)$ et E est alors un $\mathfrak{sl}(4{,}1)$-module simple de superdimension nulle. En conséquence, les caractères $\chi_{\mathfrak{sl}(4,1)}$ et $\chi_{\mathfrak{f}(4)}$ sont égaux.
En effet, on peut calculer Φ_L de la manière suivante : Si K est un $(\emptyset)$-diagramme, $\mathcal{A}$ l'ensemble de ses arêtes, $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses sommets trivalents, on colorie chaque arête a de K à l'aide de l'unique couleur $c(a) = \Omega$ puis on applique l'application ϕ de réduction :

$$\bigotimes_{a\in\mathcal{A}} c(a) \in \bigotimes_{a\in\mathcal{A}} L^{\otimes 2} \simeq \bigotimes_{s\in\mathcal{S}} L^{\otimes 3} \overset{<.,[.,.]>^{\otimes \mathcal{S}}}{\longrightarrow} \mathbb{C}$$

Comme $\Omega = \omega + \pi$, le calcul peut se développer en $\Phi_L(K) = \bigoplus_{c:\mathcal{A}\to\{\omega,\pi\}} \phi(c(K))$ où $c(K)$ désigne le diagramme K colorié par c.
La propriété $[E,E] \in l$ implique que $\phi(c(K))$ ne peut être non nul que si en chaque sommet de $c(K)$ arrivent exactement 0 ou 2 arêtes coloriées avec π. Ainsi, seuls les termes pour lesquels l'ensemble des arêtes de $c(K)$ de couleur π forme une courbe fermée contribuent au calcul. Mais ces derniers, s'ils ne sont pas entièrement coloriés avec ω, s'interprètent comme la supertrace sur E d'un tenseur l-invariant. Leur image par ϕ est donc aussi nulle grâce aux conditions imposées sur E et il ne reste dans la somme que le terme correspondant au calcul de $\Phi_l(K)$.
Remarque : Ce théorème permet de redémontrer que les caractères $\chi_{\mathfrak{sl}(E)}$ et $\chi_{\mathfrak{osp}(E)}$ ne dépendent que de la superdimension de E d'où $\chi_{\mathfrak{f}(4)} = \chi_{\mathfrak{sl}_3}$.

Références

[1] Bar-Natan D., On the Vassiliev knot invariants, Topologie 34 n ° 2 (1995), 423-472.

[2] Kac V.G., Lie superalgebras, Advances in math. 26 (1977), 8-96.

[3] Kneissler J.A., Relations in the algebra Λ, Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität preprint (1997).

[4] Le T.T.Q., Murakami J., The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links, Compositio Math. 102 (1996), 41-64.

[5] Sergeev A., The invariant polynomials on simple Lie superalgebras, preprint (1998).

[6] Vassiliev V., Cohomology of knot spaces, Theory of singularities and its applications (ed. V.I. Arnold), Advances in Soviet Math. 1 (1990), 23-69.

[7] Vogel P., Invariants de Vassiliev des noeuds, Sém. Bourbaki, 1992-93, Astérisque 216 (1993) 213-232.

[8] Vogel P., Algebraic structures on modules of diagrams, Université Paris VII preprint (1995).