Le TCL pour des produits aléatoires d'automorphismes du tore, exemples dans le cas stationnaire.

Jean-Pierre Conze (Université de Rennes 1)

Journées en l'honneur d'Emile Le Page, septembre 2011

Soient $(\Omega, \mathbb{P}, \theta)$ un système dynamique, (X, m) un espace métrique muni d'une probabilité m, et $T : \omega \to T(\omega)$ une application mesurable de Ω dans un semi-groupe de transformations préservant m de X dans lui-même.

Considérons le système dynamique sur $(\Omega \times X, \mathbb{P} \otimes m)$ défini par $\theta_T(\omega, x) = (\theta\omega, T(\omega)x)$. Les itérées de θ_T s'écrivent : $(\theta^k\omega, T_1^k(\omega)x)$ avec $T_1^k(\omega) = T(\theta^{k-1}\omega) \circ ... \circ T(\theta\omega) \circ T(\omega)$, et les sommes ergodiques d'une fonction f sur X : $S_n f(\omega, x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(T_1^k(\omega)x)$.

Nous dirons que le théorème central limite *"quenched"* est vérifié pour un sous-espace de fonctions réelles $\mathcal{H} \subset L_0^2(X, m)$, si pour $f \in \mathcal{H}$, pour presque tout $\omega \in \Omega$,
- la variance $\sigma^2(f) = \lim \frac{1}{n} \|S_n f(\omega, .)\|_{2,m}^2$ existe et ne dépend pas de ω ;
- (pour $\sigma^2(f) > 0$), $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n f(\omega, .)$ converge en loi pour la mesure m vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

Nous présentons des situations où un TCL quenched peut être obtenu, en particulier dans le cas indépendant en présence d'un trou spectral, et dans le cas stationnaire pour $X = \mathbb{T}^2$ et pour certains choix de l'application T à valeurs dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Ce dernier modèle peut, dans certains cas, être interprété comme une perturbation stationnaire des itérés d'un automorphisme.

Travaux avec Stéphane Le Borgne, en collaboration avec Mikaël Roger pour la deuxième partie.

Table des matières

1 Introduction, la question du TCL quenched pour un système fibré

Etant donnés un système dynamique $(\Omega, \mathbb{P}, \theta)$ et un espace métrique (X, m) muni d'une probabilité m, soit $T : \omega \to T(\omega)$ une application mesurable de Ω dans un semi-groupe de transformations de X dans lui-même préservant m.

Considérons le système dynamique sur $(\Omega \times X, \mathbb{P} \otimes m)$ défini par $\theta_T(\omega, x) = (\theta\omega, T(\omega)x)$. Les itérées de θ_T s'écrivent :

$$(\theta^k \omega, T_1^k(\omega)x), \text{ avec } T_1^k(\omega) = T(\theta^{k-1}\omega) \circ ... \circ T(\theta\omega) \circ T(\omega),$$

et les sommes ergodiques d'une fonction f sur X : $S_n f(\omega, x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(T_1^k(\omega)x)$.

Nous dirons que le théorème central limite *"quenched"* est vérifié pour un sous-espace de fonctions réelles $\mathcal{H} \subset L_0^2(X, m)$, si pour $f \in \mathcal{H}$, pour presque tout $\omega \in \Omega$,
- la variance $\sigma^2(f) = \lim \frac{1}{n} \|S_n f(\omega, .)\|_{2,m}^2$ existe et ne dépend pas de ω ;
- (pour $\sigma^2(f) > 0$), $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n f(\omega, .)$ converge en loi (sous la mesure m) vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

Nous allons présenter deux situations où l'on peut montrer un théorème de type quenched :
- le cas indépendant sous une propriété de trou spectral,
- le cas stationnaire pour des familles particulières d'automorphismes du tore en dimension 2.

2 Cas indépendant

2.1 Trou spectral

Soit $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace métrique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et d'une probabilité m. Soient G un groupe ou un semi-groupe localement compact de transformations boréliennes de X préservant m et μ une mesure de probabilité sur G.

Notons $\mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$ la mesure produit et $L_0^p(X, m)$, $1 \leq p \leq \infty$, le sous-espace de $L^p(X, m)$ des fonctions d'intégrale nulle.

Ces données définissent une marche aléatoire sur X, d'opérateur de transition

$$P_\mu f(x) = \int_G f(gx)\, d\mu(g).$$

L'opérateur $\tilde{P}_\mu$ correspondant à l'action diagonale sur $(X \times X, m \times m)$ est

$$\tilde{P}_\mu f(x, y) := \int_G f(gx, gy)\, d\mu(g).$$

L'opérateur P_μ définit une contraction de $L_0^p(X, m)$. Soient $P_{0,\mu}$ la restriction de P_μ à $L_0^2(X, m)$ et $\tilde{P}_{0,\mu}$ la restriction de $\tilde{P}_\mu$ à $L_0^2(X \times X, m \otimes m)$.

Nous dirons que P_μ (resp. $\tilde{P}_\mu$) a un trou spectral si $\|P_{0,\mu}\| < 1$ (resp. $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$).

Il y a plusieurs situations de nature algébrique pour lesquelles P_μ et $\tilde{P}_\mu$ vérifient la propriété de trou spectral, en particulier dans le cas de groupes d'automorphismes de tores ou de nilvariétés.

Voir en référence : B. Bekka, Y. Guivarc'h, A. Furman, Ye. Shalom, J. Bourgain, A. Gamburd.

Par exemple, dans le cas d'un groupe d'automorphismse du tore, on a la propriété de trou spectral si le groupe engendré par le support de μ n'a pas de sous-groupe abélien d'indice fini et opère de façon irréductible sur $\mathbb{R}^d$.

B. Bekka and Y. Guivarc'h ont caractérisé la situation de trou spectral dans le cas des transfomramtions affines de nilvariétés compactes.

Le système dynamique correspondant à la marche aléatoire est défini sur l'espace $(G^{\mathbb{N}^*} \times X, \mu^{\otimes \mathbb{N}^*} \otimes m)$ par

$$\theta_T : (\omega, x) \mapsto (\theta\omega, T(\omega)x), \text{ avec } \theta\,(\omega_k)_{k\geq 1} = (\omega_{k+1})_{k\geq 1} \text{ et } T(\omega)x = g_1(\omega)x.$$

En itérant nous obtenons :

$$\theta_T^n(\omega, x) = (\theta^n\omega, g_1^n(\omega)x), \text{ avec } g_1^n(\omega)x := g_n(\omega)\ldots g_1(\omega)x.$$

Soit f une fonction réelle sur X. En la considérant comme fonction sur $\Omega \times X$, nous pouvons la composer par θ_T^k. Nous nous intéressons à la distribution en x à ω fixé des sommes ergodiques

$$S_n^\omega f(x) = S_n f(\omega, x) := \sum_{k=1}^n (f \circ \theta_T^k)(\omega, x) = \sum_{k=1}^n f(g_k(\omega)\ldots g_1(\omega)x).$$

2.2 Variance et TCL à ω fixé

Il est connu (cf. M. Rosenblatt) que, si l'opérateur P_μ a un trou spectral, alors pour toute fonction $f \in L_0^2(m)$ la variance asymptotique $\sigma^2(f) := \lim \frac{1}{n} \int_{\Omega \times X} (S_n f)^2 \, dm \, d\mathbb{P}$ existe et vaut

$$\sigma^2(f) = \int_X f^2(x) \, dm(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f(x) \, P_\mu^k f(x) \, dm(x).$$

D'autre part, par une méthode inspirée de Christophe Jan (voir aussi A. Furman, Ye. Shalom), on peut montrer, pour toute fonction f réelle dans $L_0^\infty(X, m)$, une vitesse :

$$|\mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes m}(\exp(it \frac{S_n f}{\sqrt{n}})) - \exp(\frac{1}{2} \sigma^2(f) \, t^2)| \leq C \frac{\ln^2(n) \|f\|_\infty^3}{n^{1/2}}, \forall n \geq 1. \tag{1}$$

Lemme 2.1. *Si $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$, alors, pour toutes fonctions réelles f, g dans $L_0^2(X, m)$, pour tout $\alpha > 0$, il existe une fonction K intégrable, telle que, pour presque tout ω,*

$$|\|S_n^\omega g\|_2^2 - \|S_n^\omega f\|_2^2| \ \leq \ K(\omega) \, n^{1+\alpha} \|g - f\|_2 (\|g\|_2 + \|f\|_2).$$

Soit κ est une constante > 0. Etant donnée f dans $L_0^p(X, m)$ avec $p > 2$, nous utilisons une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ dans $L_0^\infty(X, m)$ telle que, pour une constante $C > 0$,

$$\|f - f_n\|_2^2 \leq C \frac{\|f\|_p^p}{n^{\kappa(p-2)}}, \quad \|f_n\|_2 \leq \|f\|_2, \ \|f_n\|_\infty \leq n^\kappa. \tag{2}$$

Pour presque tout ω, la variance asymptotique à ω fixé est égale à la variance asymptotique pour le système produit $\sigma^2(f)$:

Théoreme 2.2. *Si $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$, alors, pour toute fonction f dans $L_0^p(X,m)$, avec $p > 2$, pour presque tout ω, on a $\lim \frac{1}{n}\int_X |S_n^\omega f|^2 \, dm = \sigma^2$.*

La propriété de trou spectral permet de majorer les moments de $S_n f_n$:

Proposition 2.3. *Pour tout entier $r \geq 1$, pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $f \in L_0^\infty(X,m)$,*

$$\mathbb{P} \otimes m(|S_n f| > L) \leq C L^{-2r} n^{r(1+\alpha)} \|f\|_\infty^{2r}, \ \forall n \geq 1. \tag{3}$$

Théoreme 2.4. *Si $\|\tilde{P}_{0,\mu}\| < 1$, pour toute fonction réelle f dans $L_0^p(X,m)$, avec $p > 2$, pour presque tout $\omega \in \Omega$, nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} m(x : \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n^\omega f(\omega, x) < a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \exp(-t^2/2) \, dt, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Idée de la preuve : Grâce au lemme 2.1, on se ramène à établir la convergence pour $S_n^\omega f_n$ au lieu de $S_n^\omega f$, (f_n) étant la suite dans (2). Posons

$$Z_k(t,\omega) = |\int_X \exp(\frac{itS_k^\omega f_k(x)}{\sqrt{k}}) \, dm(x) - \exp(-\frac{\sigma_k^2 t^2}{2})|.$$

On utilise alors la vitesse de convergence de la fonction caractéristique pour l'action sur le produit (1) et la majoration des moments (3). Un découpage des entiers et de l'intervalle réel $[p,p]$ permet de contrôler, pour un entier L bien choisi, pour tout $\varepsilon > 0$, la quantité $\mathbb{P}(\sup_{k\geq N^L} \ \sup_{t\in[-p,p]} Z_k(t,\omega) \geq \varepsilon)$ et de montrer qu'elle tend vers 0 avec N.

3 Cas stationnaire, exemple d'un produit d'automorphismes du tore

3.1 Suite d'automorphismes du tore, conditions pour la décorrélation et le TCL

Prenons pour (X, m) le tore $\mathbb{T}^d$ muni de la mesure de Lebesgue et pour $\mathcal{T}$ le semi-groupe des endomorphismes surjectifs de $\mathbb{T}^d$.

Considérons d'abord de façon générale une suite d'endomorphismes surjectifs M_k et les sommes

$$S_n f(x) = \sum_{k=1}^{n} f({}^t M_k x).$$

Quand les matrices M_k sont positives, ceci peut être vu comme une généralisation des sommes de la forme $S_n f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(q_k x)$ (cf. Fortet, Kac, Salem, Zygmund, Gaposhkin, Berkes, ...).

Remarquons qu'il y a des exemples de suites (M_k) de matrices positives avec croissance exponentielle pour lesquelles il n'y a pas convergence en loi vers une loi normale standard. C'est le cas dès la dimension 1 avec la suite $q_n = 2^n - 1, n \geq 1$, un exemple dû à Fortet et Erdös, et on peut construire des exemples en dimension > 1.

Dans l'étude du comportement des sommes $S_n f$, les questions suivantes se posent :
- propriété de décorrélation de la suite $(f({}^t M_k x))_{k \geq 1}$ (ce qui permet de contrôler la variance),
- non nullité de la variance (assurant que la limite est non dégénérée).

Cette dernière question est difficile même pour des sommes arithmétiques en dimension 1, en dehors du cas où la suite (q_n) (ou la suite des matrices) a une croissance "superlacunaire".

Cependant la situation est meilleure dans le cas stationnaire quand la suite est obtenue comme produit d'une suite aléatoire stationnaire non nécessairement indépendante de matrices.

Considérons un processus stationnaire $(A_k(\omega))$ à valeurs dans $\mathcal{M}_d^*(\mathbb{Z})$ et les produits correspondants ${}^tM_k(\omega) ={}^t A_k(\omega)...{}^tA_1(\omega)$. Comme dans l'introduction la stationnarité est exprimée à l'aide d'un système dynamique :

Notations 3.1. Soit θ une transformation ergodique inversible préservant la mesure sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$. Soient $\mathcal{A}$ un ensemble de matrices dans $\mathcal{M}_d^*(\mathbb{Z})$, $\omega \to A(\omega)$ une application mesurable de Ω dans $\mathcal{A}$ et T l'application $\omega \to T(\omega)$ de Ω dans le semi-groupe des endomorphismes de $\mathbb{T}^d$ définie par $T(\omega)\, x = {}^tA(\omega)\, x$.

Le produit gauche θ_T est défini sur l'espace produit $\Omega \times \mathbb{T}^d$ muni de la mesure produit $\nu := \mathbb{P} \otimes m$ par $\theta_T : (\omega, x) \mapsto (\theta\omega, T(\omega)x)$.

Pour $\omega \in \Omega$ et f fonction sur $\mathbb{T}^d$, les sommes ergodiques sont

$$S_n(\omega, f)(x) \ = \ \sum_{k=1}^{n} f({}^tA_1^k(\omega)x), \quad \text{avec } A_1^k(\omega) = A(\omega)A(\theta\omega)...A(\theta^{k-1}\omega), \ k \geq 1.$$

La question se pose du TCL pour p.t. ω pour les sommes $S_n f(\omega, .)$.

Lorsque $\mathcal{A}$ se réduit à une seule matrice $A \in SL(d, \mathbb{Z})$ sans racine valeur propre de l'unité, alors $T(\theta^{k-1}\omega)...T(\theta\omega)\, T(\omega) = A^k$. Si f est Hölder sur $\mathbb{T}^d$, le TCL est vérifié pour les sommes ergodiques $S_n f(.) = \sum_{k=0}^{n-1} f(A^k.)$.

Question : Si l'on perturbe la suite des itérées en introduisant de temps à autre la composition par d'autres matrices, il y a-t-il une forme de stabilité, par exemple conservation du TCL ?

Nous allons utiliser une méthode d'analyse harmonique et de "systèmes multiplicatifs" de Komlòs pour obtenir une réponse positive dans certains cas particuliers.

Mélange, variance

Les conditions suffisantes suivantes de *séparation des fréquences* assurent la décorrélation et la convergence en loi vers une loi normale.

Condition 3.2. *Il existe $C_1 > 0$ tel que pour p.t. ω, pour $p, q \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ tels que $\|p\|, \|q\| \leq D$,*

$$A_1^r(\theta^\ell \omega)p \neq q, \ \forall r > C_1 \log D, \ \forall \ell \geq 0. \tag{4}$$

Condition 3.3. *Pour p.t. ω, il existe $\gamma > 1$, c et $C > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$*

$$\|A_1^{\ell+r}(\omega)p\| \ \geq c\gamma^{r-C\log\|p\|}\|A_1^\ell(\omega)\|, \ \forall r > C_1 \log\|p\|, \ \forall \ell \geq 1. \tag{5}$$

Proposition 3.4. *Sous la condition 3.2, si* $(\Omega, \mathbb{P}, \theta)$ *est ergodique, alors le système dynamique* $(\Omega \times \mathbb{T}^d, \theta_T, \mathbb{P} \otimes m)$ *est ergodique. Le système* $(\Omega \times \mathbb{T}^d, \theta_T, \mathbb{P} \otimes m)$ *est mélangeant sur les fonctions* $f \in L^2(\Omega \times \mathbb{T}^d)$ *orthogonales au sous-espace des fonctions ne dépendant que de* ω. *Pour* $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{T}^d)$, *on a décorrélation exponentielle et la variance existe.*

En considérant la norme $\|S_n(\omega, f)\|_2$ prise *par rapport à* x, ω *étant fixé*, nous avons :

Proposition 3.5. *Sous la condition 3.2, pour tout* $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{T}^d)$, *pour* $\mathbb{P}$-*p.p.* $\omega \in \Omega$, *la suite* $(n^{-\frac{1}{2}}\|S_n(\omega, f)\|_2)$ *converge vers la variance* $\sigma(f)^2 = \lim_n \frac{1}{n}\|S_n f\|_{2,\nu}^2$ *donnée par le produit gauche. De plus* $\sigma(f) = 0$ *si et seulement si* f *satisfait dans* L^2 *la condition de cobord :*

$$\text{il existe } g \in L^2(\nu) \text{ telle que } f(x) = g(\omega, x) - g(\theta\omega, T(\omega)x), \ \nu - \text{p.t.} \tag{6}$$

Par la méthode de séparation des fréquences, on peut établir un TCL par exemple dans le cas des composées des matrices 2×2 positives. Noter que la méthode s'applique également au cas indépendant (composition de matrices aléatoires indépendantes sur le tore) en toute dimension. C'est une approche complètement différente de celle du trou spectral.

Nous allons discuter maintenant en dimension 2, le cas des systèmes "kicked".

3.2 Systèmes "kicked"

Soit H une matrice hyperbolique dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et (B_n) une suite dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ telle que la suite $(\mathrm{trace}(B_n))$ soit bornée. Soit $s \geq 1$ un entier fixé. Considérons la suite M_n d'automorphismes :

$$M_n = B_1 H^s ... B_{n-1} H^s B_n H^s. \tag{7}$$

L. Polterovich et Z. Rudnick ont appelé une telle suite (7) *kicked system*. Ils ont montré la propriété de "mélange stable" suivante : si H n'est pas conjuguée à son inverse, pour tout K il existe s_0 tel que, pour toute suite de "kicks" (B_k) à trace bornée par K, la suite définie par (7) vérifie, pour tout $s \geq s_0$, la propriété de décorrélation : si f et g sont Hölder, il existe des constantes C et $0 < \kappa < 1$ telles que

$$|\int_{\mathbb{T}^d} f({}^t M_n x)\, \overline{g}(x)\, dm(x)| \leq C\kappa^n, \ \forall n \geq 1.$$

Un *quasi-morphisme* sur un groupe G est une fonction $r : G \to \mathbb{R}$ telle que la fonction $dr : G \times G \to \mathbb{R}$ définie par $dr(g_1, g_2) = r(g_1 g_2) - r(g_1) - r(g_2)$ soit bornée. Un quasi-morphisme homogène satisfait de plus $r(g^n) = nr(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Nous utilisons les résultats suivants de Polterovich et Rudnick.

Théoreme 3.6. *([10]) Soit r un quasi-morphisme homogène de* $\mathrm{SL}(2, Z)$ *qui s'annule sur les éléments paraboliques. Alors il existe $c > 0$ tel que pour tout vecteur non nul $v \in \mathbb{Z}^2$ et tout $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$,*

$$\|Av\| \geq e^{c|r(A)|} \|v\|^{-1}. \tag{8}$$

Si H n'est pas conjugué à son inverse, il existe un quasi-morphisme homogène r tel que $r(H) = 1$ et r s'annule sur les éléments paraboliques et de ce fait est borné sur tout ensemble de matrices dans $SL(2, \mathbb{Z})$ de trace uniformément bornée.

Le théorèeme implique

$$r(B_n H^s B_{n-1} H^s ... B_1 H^s) = \sum_{i=1}^{n} [r(H^s) + r(B_i) + O(1)] = ns + O(n),$$

permet d'avoir pour les produits une minoration à partir de (8) et implique une borne inférieure uniforme pour l'exposant de Lyapunov. Nous allons utiliser ce résultat et le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledets, pour appliquer une forme faible de la propriété de "séparation des fréquences" et en déduire le TCL.

Les occurrences des B_k dans la suite (A_k) peuvent être interprétées comme une perturbation de la suite $A_k = H^k, \forall k \geq 1$. Nous avons stabilité si la décorrélation et le TCL persistent pour de petites perturbations. "Petit" signifie que la densité d'occurrence des B_k est petite.

Proposition 3.7. *Si une suite(A_k) à valeurs dans $\mathcal{A}$ satisfait la condition*

$$\sum_{k=\ell}^{\ell+r} 1_{A_k \neq H} \leq r\varepsilon,\ \forall r \geq r_0,\ \forall \ell \geq 1. \tag{9}$$

pour un $r_0 \geq 1$, et pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $\gamma > 1$ tel que

$$\|A_\ell^{\ell+r} p\| \geq c\gamma^r \, \|p\|^{-1},\ \forall r \geq r_0(\varepsilon),\ \forall \ell \geq 1,\ \forall p \in \mathbb{Z}^2 - \{0\}. \tag{10}$$

Un système kicked stationnaire est de la forme :

$$M_n(\omega) = B(\theta^{n-1}\,\omega) H^{s(\theta^{n-1}\,\omega)} \ldots B(\theta\omega) H^{s(\theta\,\omega)}\, B(\omega) H^{s(\omega)}. \tag{11}$$

Exemples

1) Si l'ensemble des matrices $\mathcal{A} = \{H^s B_j, s \in \mathbb{N}\}$ est tel que $\{B_j\}$ est une famille dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ avec trace bornée et H hyperbolique, alors pour s grand (10) est vérifiée. La construction est possible pour tout système dynamique.

2) Une autre construction consiste à prendre comme système dynamique un sous-shift de type fini. Considérons l'ensemble de matrices $\mathcal{A} = \{H^s, B_1, ..., B_r\}$, vu comme l'ensemble des états d'un sous-shift de type fini. Supposons que les transitions permises d'un état B_r soient nécessairement vers H^s. Nous obtenons alors un système stationnaire kicked qui satisfait (10), si s est assez grand.

3) Considérons un ensemble $\mathcal{A}$ de matrices de la forme

$$\mathcal{A} = \{H, B_1, ..., B_j, ...\}, \text{avec } \sup_j \operatorname{trace}(B_j) < +\infty.$$

Supposons Ω compact, $(\Omega, \mathbb{P}, \theta)$ strictement ergodique. Soit $\omega \to A(\omega) \in \mathcal{A}$ une application de Ω dans $\mathcal{A}$, avec $A(\omega) \neq H$ sur un ensemble E. Supposons que $\mathbb{P}(\partial E) = 0$. On a alors, uniformément en ω, $\lim_n \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} 1_E(\theta^k \omega) = \mathbb{P}(E)$. Il existe donc r_0 tel que, pour $r \geq r_0$ et tout $\omega \in \Omega$, $\sum_0^{r-1} 1_E(\theta^k \omega) < 2r\mathbb{P}(E)$.

Pour un système stationnaire kicked tel que $A_k(\omega) = H$ si $\theta^k \omega \notin E$, $A_k(\omega) = B_k$, pour l'un des B_k, si $\theta^k \omega \notin E$, alors (10) est vérifiée quand $\mathbb{P}(E)$ est assez petit.

Utilisation du théorème ergodique multiplicatif

Sous l'hypothèse de la proposition 3.7 la condition 3.2 est satisfaite et l'exposant de Lyapunov est > 0 Nous allons en déduire une forme faible de "séparation des fréquences" et un TCL en utilisant le théorème d'Oseledets.

D'après le théorème ergodique multiplicatif, nous avons l'énoncé suivant :

Soit $M_n(\omega)$ un produit $M_n(\omega) = A_1^n(\omega) = A(\omega)...A(\theta^{n-1}\omega)$, où $(A(\theta^k \omega))_{k \geq 0}$ est une suite stationnaire de matrices dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ avec exposant de Lyapunov $\alpha > 0$. Soit $X \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 3.8. *Il existe une fonction mesurable à valeurs matricielles* Φ,

$$\Phi(\omega) = \begin{pmatrix} a(\omega) & b(\omega) \\ c(\omega) & d(\omega) \end{pmatrix}, \ det\,\Phi(\omega) = 1,$$

telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$M_n(\omega)X = \lambda_n(\omega)\langle\varphi(\theta^n\omega), X\rangle\, U(\omega) + \lambda_n^{-1}(\omega)\langle\psi(\theta^n\omega), X\rangle\, V(\omega).$$

où $\varphi(\omega)$ *et* $\psi(\omega)$ *sont des formes linéaires et* $U(\omega), V(\omega)$ *des vecteurs donnés par*

$$\langle\varphi(\omega), X\rangle = a(\omega)x + b(\omega)y,\ \langle\psi(\omega), X\rangle = c(\omega)x + d(\omega)y,$$
$$U(\omega) = \begin{pmatrix} d(\omega) \\ -c(\omega) \end{pmatrix}, V(\omega) = \begin{pmatrix} -b(\omega) \\ a(\omega) \end{pmatrix}.$$

$\lambda_n(\omega)$ *est le produit* $\lambda_n(\omega) = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda(\theta^k\omega)$ *et satisfait pour p.t.* ω *:*

$$\frac{1}{n}\ln\lambda_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1}\ln\lambda(\theta^k\omega) \to \alpha,\ \frac{1}{n}\ln\lambda_n(\theta^{-n}\omega) = \frac{1}{n}\sum_1^{n}\ln\lambda(\theta^{-k}\omega) \to \alpha.$$

De plus, en posant $\|\Phi(\omega)\| = |a(\omega)| + |b(\omega)| + |c(\omega)| + |d(\omega)|$, *nous avons*

$$\|\Phi(\omega)\|^{-1} \leq \|U(\omega)\|, \|V(\omega)\| \leq \|\Phi(\omega)\|$$

et il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, *une fonction p.p. finie* $L(\varepsilon, \omega)$ *telle que :*

$$L(\varepsilon,\omega)^{-1}\, e^{-\varepsilon|n|} \leq \|U(\theta^n\omega)\|, \|V(\theta^n\omega)\|, \|\Phi(\theta^n\omega)\| \leq L(\varepsilon,\omega)\, e^{\varepsilon|n|},\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

L'énoncé précédent permet de montrer que, dans notre situation, tout vecteur entier non nul est "bon" du point de vue de la croissance du produit de matrices dans le sens suivant :

Proposition 3.9. *Soit $0 < \alpha_1 < \alpha$ et $\varepsilon > 0$. Il existe des fonctions p.p. finies > 0 δ_1, δ_2, S telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}^2 - \{0\}$, pour tout $n \geq S(\omega) + \frac{1}{\alpha_1} \ln \|p\|$, pour tout $0 \leq r \leq n$,*

$$\|M_{n+r}(\omega)p\| \geq \delta_1(\theta^n\omega)\, \delta_2(\omega)\, e^{\alpha_1 r}\, \|p\|^{-(1+\varepsilon)}\, \|M_n(\omega)\|. \tag{12}$$

La proposition permet de construire des sous-suites de densité arbitrairement proche de 1 le long desquelles les conditions 3.2 et 3.3 sont vérifiées grâce aux énoncés précédents. On montre alors le TCL d'abord le long de ces sous-suites, puis grâce à la minoration uniforme donnée par (10) en utilisant les propriétés de variance, on obtient le TCL pour la suite des entiers naturels. On obtient ainsi :

Théoreme 3.10. *Le TCL quenched est vérifié par les système stationnaires "kicked".*

Références

[1] A. Ayyer, C. Liverani, M. Stenlund : Quenched CLT for random toral automorphism, Discrete Contin. Dyn. Syst. 24 (2009), no. 2, p. 331-348.

[2] B. Bekka, Y. Guivarc'h : Spectral properties of a group of affine transformations on a nilmanifold, preprint 2011.

[3] J. Bourgain, A. Gamburd : Spectral gaps in SU(d), C. R. Math. Acad. Sci. Paris 348 (2010), no. 11-12, p. 609-611.

[4] J.-P. Conze, S. Le Borgne, M. Roger : Central limit theorem for stationary products of toral automorphisms, preprint 2010.

[5] J.-P. Conze, S. Le Borgne : Limit law for some modified ergodic sums, Stochastics and Dynamics, vol. 11 (2011), no. 1, p. 107-133.

[6] J.-P. Conze, S. Le Borgne : Théorème limite central presque sûr pour les marches aléatoires avec trou spectral (Quenched central limit theorem for random walks with a spectral gap), CRAS 2011.

[7] A. Furman, Ye. Shalom : Sharp ergodic theorems for group actions and strong ergodicity, Ergodic Theory Dynam. Systems 19 (1999), no. 4, p. 1037-1061.

[8] Y. Guivarc'h : Limit theorems for random walks and products of random matrices, in *Probability measures on groups : recent directions and trends*, p. 255-330, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2006.

[9] C. Jan : Vitesse de convergence dans le TCL pour des chaînes of Markov et certains processus associés à des systèmes dynamiques, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 331 (2000), 5, p. 395-398.

[10] L. Polterovich, Z. Rudnick : Stable mixing for cat maps and quasi-morphisms of the modular group. Ergodic Theory Dynam. Systems 24 (2004), no. 2, 609-619.

[11] A. Raugi : Théorème ergodique multiplicatif, produits de matrices aléatoires indépendantes, Publ. Inst. Rech. Math. Rennes, 1996/1997, Univ. Rennes I, Rennes, 1997.

[12] M. Rosenblatt : *Markov processes. Structure and asymptotic behavior*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 184, Springer-Verlag, New York, 1971.