Université de Bretagne-Sud
L3 Mathématiques, parcours Statistique

Statistique Mathématique
Travaux Dirigés - Partie 6

Exercice 1

On souhaite tester $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$, où θ est l'espérance d'une variable normale de variance connue. On suppose que la taille d'échantillon n est fixée. Montrer que le test vu en cours (rejeter H_0 si $\overline{X} > c$) est *uniformément le plus puissant*. En d'autres termes, si on teste $\theta = \theta_0$ contre $\theta = \theta_1$ pour $\theta_1 > \theta_0$ quelconque, en spécifiant la probabilité d'erreur de type 1, alors β, la probabilité d'erreur de type 2, est minimale.

Exercice 2

On souhaite tester l'hypothèse nulle qu'un dé est sans biais contre l'alternative qu'il est truqué, les faces 1 et 2 ayant la probabilité 1/4 et les faces 3, 4, 5 et 6 ayant la probabilité 1/8. On décide de lancer le dé une fois. Déterminer un test UPP (uniformément le plus puissant) de niveau $\alpha = 0.1$ et déterminer la probabilité β d'erreur de type 2 correspondante.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire binomiale de loi $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 400$. On souhaite tester $H_0 : p = 1/2$ contre $H_1 : p > 1/2$. Sous H_0, a variable aléatoire $Y = (X - np)/\sqrt{np(1-p)} = (X - 200)/10$ est approximativement de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et on décide de rejeter H_0 si $Y > c$. Si l'on spécifie $\alpha = 0.05$, alors $c = 1.645$. La région critique est donc $X > 216.45$.
Supposons que le résultat observé soit $X = 220$, donc que H_0 soit rejetée. Déterminer la valeur minimum de α (la *p-value*) pour laquelle le résultat observé conduit à la conclusion opposée (acceptation de H_0).