Université de Bretagne-Sud
L3 Mathématiques, parcours Statistique

Statistique Mathématique
Travaux Dirigés - Partie 5

Exercice 1

Soit X de loi binomiale $\mathcal{B}(n,\theta)$ et supposons que θ soit densité $\beta(r,s)$:

$$h(\theta) = \frac{\theta^{r-1}(1-\theta)^{s-1}}{\beta(r,s)}.$$

Montrer que l'estimation bayésienne de θ pour le critère d'erreur quadratique est donnée par :

$$\delta(x) = \frac{r+x}{r+s+n}, \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

Exercice 2

Pour l'estimation précédente, montrer que la fonction de risque $R_\delta(\theta)$, définie comme la perte moyenne encourue en utilisant δ lorsque le paramètre vaut θ, est donnée par :

$$\frac{1}{(r+s+n)^2}[((r+s)^2-n)\theta^2 + (n-2r(r+s))\theta + r^2].$$

Exercice 3

Montrer que si $r = s = \sqrt{n}/2$, alors $R_\delta(\theta)$ est une constante indépendante de θ.

Exercice 4

Montrer qu'une estimation bayésienne δ de risque constant (comme dans l'exercice précédent) est *minimax*, c'est-à-dire que δ minimise $\max_\theta R_\delta(\theta)$.