Université de Bretagne-Sud

L3 Mathématiques, parcours Statistique

Statistique Mathématique
Travaux Dirigés - Partie 1

Exercice 1

Soit Ω un ensemble non vide et soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de Ω dont les éléments sont appelés des événements. On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω si :

i) Ω est un événement ;

ii) le complémentaire de tout événement est un événement ;

iii) toute réunion dénombrable d'événements est un événement.

Soient à présent $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ deux tribus sur Ω.

a) Montrer que leur intersection est une tribu sur Ω ;

b) En déduire que si $\mathcal{H}$ est une famille quelconque de parties de Ω, il existe une tribu contenant $\mathcal{H}$ et qui est contenue dans toute tribu contenant $\mathcal{H}$ (c'est la *plus petite* tribu contenant $\mathcal{H}$, également appelée *tribu engendrée* par $\mathcal{H}$).

Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. A, B, C étant trois événements quelconques, exprimer sous forme ensembliste les événements ci-après :

Parmi A, B, C :

a) A seul se produit ;

b) A et B se produisent mais non C ;

c) les trois événements se produisent simultanément ;

d) au moins l'un des événements se produit ;

e) au moins deux événements se produisent ;

f) deux événements au plus se produisent ;

g) un seul événement se produit ;

h) deux événements ou plus se produisent ;

i) deux événements seulement se produisent ;

j) aucun des trois événements ne se produit ;

k) pas plus de deux événements ne se produisent.

Exercice 3

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, c'est-à-dire que Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω. Soit $\mathbb{P}$ une fonction d'ensembles définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $[0, 1]$. On dit que $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si :

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

ii) Si $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ est une suite finie ou infinie dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{P}(A_i).$$

1. Montrer les résultats suivants :

a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

b) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;

c) Pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B);$$

2. En utilisant la définition de la probabilité conditionnelle vue en cours, démontrer le théorème de Bayes : Si $A, B \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, alors

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Exercice 4

On tire successivement une carte de chacun de deux jeux de 52 cartes. Quelle est la probabilité de sortir au moins un as ?

Exercice 5

On joue à pile ou face jusqu'à obtenir au moins 3 piles et au moins 3 faces. Quelle est la probabilité que ce résultat ne soit pas encore atteint au dixième jet ?

Exercice 6

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A, B, C trois événements. On désigne par $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C)$ leurs probabilités, par $\mathbb{P}(A \cap B), \mathbb{P}(A \cap C), \mathbb{P}(B \cap C)$ les probabilités de leurs intersections deux à deux et par $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ la probabilité de leur intersection.

Exprimer en fonction de ces sept quantité les probabilités attachées aux événements définis dans l'exercice 2.

Exercice 7

Soient X, Y, Z des v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées, de densité $f(x) = 6x^5$ pour $0 \leq x \leq 1$ et 0 partout ailleurs. Déterminer la fonction de répartition et la densité du maximum de X, Y, Z.

Exercice 8

Soient X, Y deux v.a.r. indépendantes, chacune de densité e^{-x} $(x \geq 0)$. Déterminer la fonction de répartition et/ou la densité de $Z = Y/X$.

Exercice 9

Une variable aléatoire X est de densité $f(x) = ax^2$ sur l'intervalle $[0, b]$ Déterminer la densité de $Y = X^3$.

Exercice 10

La densité conjointe de deux v.a.r. X_1 et X_2 est donnée par $f(x_1, x_2) = 2e^{-x_1}e^{-x_2}$ pour $0 < x_1 < x_2 < \infty$ et $f(x_1, x_2) = 0$ partout ailleurs. Considérer la transformation $Y_1 = 2X_1$, $Y_2 = X_2 - X_1$. Déterminer la densité conjointe de Y_1 et Y_2 et en déduire que Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

Exercice 11

Reprendre l'exercice 10 avec les données suivantes : la densité conjointe est donnée par $f(x_1, x_2) = 8x_1x_2$ $(0 < x_1 < x_2 < 1)$, $f(x_1, x_2) = 0$ partout ailleurs, $Y_1 = X_1/X_2$, $Y_2 = X_2$.