Optimisation à finalité statistique

Salim Lardjane

Université de Bretagne-Sud
Année 2013-2014

Cours 5 - Algorithmes de recherche directe : cas multidimensionnel

Cas multidimensionnel

Il existe plusieurs algorithmes de recherche directe permettant de localiser le minimum d'une fonctionde plusieurs paramètres.

Parmi ceux-ci, un des plus utilisés est l'algorithme du simplexe, encore appelé *algorithme de Nelder-Mead*.

On appelle *simplexe* la figure géométrique composée de $m + 1$ points dans un espace de dimension m.

Lorsque les points sont équidistants, on dit que le simplexe est *régulier*; en dimension deux, un simplexe est un triangle.

Cas multidimensionnel

L'idée de base de l'algorithme du simplexe est de comparer les valeurs de la fonction aux $m+1$ sommets d'un simplexe quelconque et de *déplacer* ce simplexe graduellement vers le minimum de la fonction au cours d'un processus itératif.

Cas multidimensionnel

Le *déplacement* du simplexe vers le minimum est réalisé à l'aide de trois opérations de base : *réflexion*, *contraction* et *dilatation*.

Une variante possible de l'algorithme est la suivante :

Cas multidimensionnel

1- Ordonner les valeurs de la fonction au sommets du simplexe de façon à avoir

$$f(\theta_l) \leq \cdots \leq f(\theta_n)$$

θ_l correspond au minimum de la fonction sur les sommets du simplexe. θ_n correspond au maximum de la fonction sur les sommets du simplexe.

2- Déterminer θ_0, centre de gravité de tous les sommets *excepté* θ_n.

3- *Réflexion* : Déterminer le point *réfléchi*

$$\theta_r = \theta_0 + \alpha(\theta_0 - \theta_n)$$

Si $f(\theta_l) \leq f(\theta_r) < f(\theta_n)$, alors faire

$$\theta_n \leftarrow \theta_r$$

et aller à l'étape 1.

Cas multidimensionnel

4- ***Dilatation*** : Si $f(\theta_r) < f(\theta_l)$, calculer le point *dilaté*

$$\theta_e = \theta_0 + \gamma(\theta_0 - \theta_n)$$

Si $f(\theta_e) < f(\theta_r)$, alors faire

$$\theta_n \leftarrow \theta_e$$

et aller à l'étape 1. Sinon, faire

$$\theta_n \leftarrow \theta_r$$

et aller à l'étape 1.

Cas multidimensionnel

5- ***Contraction*** : Si $f(\theta_r) \geq f(\theta_n)$, déterminer le point obtenu par contraction

$$\theta_c = \theta_n + \rho(\theta_0 - \theta_n)$$

Si $f(\theta_c) < f(\theta_n)$, alors faire

$$\theta_n \leftarrow \theta_c$$

et aller à l'étape 1, sinon aller à l'étape 6.

Cas multidimensionnel

6- ***Réduction (similitude)*** : Faire pour $i = 1, \ldots, m+1$, $i \neq l$,

$$\theta_i \leftarrow \theta_l + \sigma(\theta_i - \theta_l)$$

et aller à l'étape 1.

Le critère usuel de convergence pour la méthode du simplexe est

$$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{m+1} [f(\theta_i) - f(\theta_0)]^2}{m+1} \right\}^{1/2} < \varepsilon$$

pour ε fixé.

Cas multidimensionnel

α, γ, ρ et σ sont respectivement les coefficients de réflexion, dilatation, contraction et réduction. Les valeurs usuelles de ces paramètres sont

$$\alpha = 1 \quad \gamma = 2 \quad \rho = \frac{1}{2} \quad \sigma = \frac{1}{2}$$

Sous SAS, l'algorithme de Nelder-Mead est implémenté par la **proc nlp**.

Sous R, la fonction **optimize()** permet de minimiser des fonctions à un paramètre en combinant l'algorithme de la section dorée et des interpolations quadratiques.

Sous R, l'algorithme de Nelder-Mead est implémenté par la fonction **optim()**. Cette dernière est par ailleur utilisée par la fonction **mle()** de R.

Cas multidimensionnel

Exercice 1. Afin d'illustrer l'utilisation de l'algorithme du simplexe, on pourra l'appliquer, sous R et Python, à la détermination du minimum de la fonction dite *de Rosenbrock* :

$$f(\theta_1, \theta_2) = 100(\theta_2 - \theta_1^2)^2 + (1 - \theta_1)^2$$

avec $\varepsilon = 0.0001$.