

Optimisation à finalité statistique

Salim Lardjane

Université de Bretagne-Sud

Cours 3 - Minimisation sous contraintes

Minimisation sous contraintes

Dans ce qui précède, on a supposé que le vecteur des paramètres θ n'était soumis à aucune *contrainte*.

Ce n'est pas toujours le cas en pratique.

Les contraintes peuvent prendre la forme d'égalités, par exemple

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = 1$$

ou d'inégalités, par exemple

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 > 0$$

Minimisation sous contraintes

Dans un contexte statistique, de telles contraintes peuvent apparaître pour diverses raisons : les paramètres peuvent par exemple être des *variances* et doivent donc être positifs, ou les paramètres peuvent être des probabilités ou des proportions et doivent donc être compris entre zéro et un.

La méthode *la plus simple* pour traiter des problèmes d'optimisation sous contraintes est de *reparamétriser* le problème de façon à ce qu'il se ramène à un problème *sans contraintes*.

Minimisation sous contraintes

Par exemple, si un paramètre est soumis à des contraintes du type $\theta_i > c_i$ ou $a_i < \theta_i < b_i$, où a_i , b_i et c_i sont des constantes, alors on peut définir un *nouveau paramètre* α_i par

$$\alpha_i^2 = \theta_i - c_i$$

dans le premier cas et

$$\sin^2(\alpha_i) = \frac{\theta_i - a_i}{b_i - a_i}$$

dans le deuxième cas, ce qui permet de supprimer les contraintes imposées.

Minimisation sous contraintes

Une situation particulièrement fréquente en Statistique est celle où $a_i = 0$ et $b_i = 1$.

Dans ce cas, une transformation souvent utilisée en pratique est la *transformation logistique*

$$\alpha_i = \log \frac{\theta_i}{1 - \theta_i}$$

Des méthodes plus formelles pour traiter des problèmes d'optimisation sous contraintes sont la *méthode des multiplicateurs de Lagrange* et la *méthode de pénalisation*.

Il est important de souligner que de nombreux problèmes d'optimisation sous contraintes peuvent être résolus par des méthodes d'optimisation sans contraintes en vérifiant que les solutions obtenues vérifient les contraintes imposées.