LMBA
Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique
UMR6205 - CNRS/UBO/UBS

Histoire des Mathématiques

Des nombres de Cantor et de Dedekind aux nombres de Conway

Partie 1. Coupures, nombres réels et nombres surréels

Salim Lardjane
Maître de Conférences
Université Bretagne Sud

Introduction

A la suite du premier exposé, nous disposons de notions de nombres entiers et de nombres rationnels positifs (strictement) avec une relation d'ordre total archimédien et les opérations d'addition, de multiplication et de division.

Passons à présent à la notion de **coupure**, essentielle à la construction des nombres réels par la méthode de Richard Dedekind.

Coupures

Définition 28 : Un ensemble de nombres rationnels est appelé **une coupure** si :
1) il contient un nombre rationnel, mais ne contient pas tous les nombres rationnels ;
2) tout nombre rationnel lui appartenant est inférieur à tout nombre rationnel ne lui appartenant pas ;
3) il ne contient pas de plus grand élément (i.e. un nombre rationnel supérieur à tout autre nombre de l'ensemble).

Coupures

On utilise également le terme de *classe inférieure* pour désigner une coupure et *classe supérieure* pour désigner l'ensemble de tous les rationnels qui n'appartiennent pas à la classe inférieure.

Les éléments des deux ensembles sont appelés *nombres inférieurs* et *nombres supérieurs*, respectivement.

On utilisera l'alphabet grec pour désigner des coupures.

Coupures

Définition 29 : $\xi = \eta$ ($=$ est lu "est égal à") si tout nombre inférieur pour ξ est un nombre inférieur pour η et tout nombre inférieur pour η est un nombre inférieur pour ξ.

En d'autres termes, $\xi = \eta$ si les deux ensembles sont identiques.

Sinon, on note $\xi \neq \eta$ ($\neq$ est lu "est différent de").

Coupures

Théorème : L'égalité $=$ est une relation d'équivalence.

Preuve. Landau (1929, trad. 1951 éd. 1966) p. 43.

Coupures

Théorème : Si x est un nombre supérieur pour ξ et si y est un nombre rationnel tel que $y > x$, alors y est un nombre supérieur pour ξ.

Preuve. Landau, op. cit. p. 44.

Théorème : Si x est un nombre inférieur pour ξ et si y est un nombre rationnel tel que $y < x$, alors y est un nombre inférieur pour ξ.

Preuve. Landau, op. cit. p. 44.

Ce théorème est en fait équivalent à la propriété 2) de la définition 28.

Coupures

Ainsi, si on souhaite démontrer qu'un ensemble donné de rationnels est une coupure, il suffit de démontrer les propriétés suivantes :
1) L'ensemble n'est pas vide, et il existe un rationnel ne lui appartenant pas.
2) Pour chaque rationnel qu'il contient, il contient également tous les rationnels inférieurs à ce rationnel.
3) Pour chaque rationnel qu'il contient, il contient un rationnel qui lui est supérieur.

La propriété 2) signifie que l'ensemble doit inclure la *section commençante* de rationnels associée à chacun de des éléments.

Coupures

Définition 30 : Si ξ et η sont des coupures, alors

$$\xi > \eta$$

($>$ est lu "est supérieure à") s'il existe un nombre inférieur pour ξ qui est un nombre supérieur pour η.

Définition 31 : Si ξ et η sont des coupures, alors

$$\xi < \eta$$

($>$ est lu "est inférieure à") s'il existe un nombre supérieur pour ξ qui est un nombre inférieur pour η.

Coupures

Théorème : Si

$$\xi < \eta$$

alors

$$\eta > \xi.$$

Preuve. Immédiat. Landau, op. cit. p. 45.

Théorème : Si

$$\xi > \eta$$

alors

$$\eta < \xi.$$

Preuve. Immédiat. Landau, op. cit. p. 45.

Coupures

Théorème : Pour toutes coupures ξ, η données, exactement l'une des assertions

$$\xi = \eta, \quad \xi > \eta, \quad \xi < \eta$$

est vraie.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 45-46.

Coupures

Définition 32 : $\xi \geq \eta$ signifie

$$\xi > \eta \quad \text{ou} \quad \xi = \eta.$$

($\geq$ est lu "est supérieure ou égale à").

Définition 33 : $\xi \leq \eta$ signifie

$$\xi < \eta \quad \text{ou} \quad \xi = \eta.$$

($\leq$ est lu "est inférieure ou égale à").

Théorème : Si $\xi \geq \eta$, alors $\eta \leq \xi$.

Preuve. Immédiat. Landau, op. cit. p. 46.

Coupures

Théorème : Les relations $<$ et $\leq$ sont transitives.

Preuve. Landau, op. cit. p. 47.

Théorème : La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur la classe des coupures.

Preuve. Immédiat d'après ce qui précède.

Coupures

Théorème : I) Soit ξ et η des coupures. Alors, l'ensemble de tous les nombres rationnels pouvant s'écrire sous la forme $x+y$ où x est un nombre inférieur pour ξ et y est un nombre inférieur pour η, est lui-même une coupure.
II) Aucun élément de cet ensemble ne peut s'écrire comme somme d'un nombre supérieur pour ξ et d'un nombre supérieur pour η.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 48-49.

Coupures

Définition 34 (addition) : La coupure construite dans le théorème précédent est notée $\xi+\eta$ ($+$ est lu "plus") et est appelée la *somme* de ξ et η ou la coupure obtenue par *addition* de η à ξ.

Théorème : L'addition des coupures est commutative et associative.

Preuve. Landau, op. cit. p. 49.

Coupures

Théorème : Etant donné une coupure ξ et un nombre rationnel a, il existe un nombre inférieur x pour ξ et un nombre supérieur u pour ξ tels que

$$u - x = a.$$

Preuve. Landau, op. cit. pp. 49-50.

Coupures

Théorème : Si

$$\xi > \eta$$

alors

$$\eta + \nu = \xi$$

admet exactement une solution ν.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 52-53.

Définition 35 (différence) : La solution ν du théorème précédent est notée $\xi - \eta$ (- est lu "moins") et est appelée la *différence* ξ moins η ou la coupure obtenue par *soustraction* de η de ξ.

Coupures

Théorème : I) Soit ξ et η des coupures. Alors, l'ensemble de tous les nombres rationnel représentables sous la forme xy, où x est un nombre inférieur pour ξ et y un nombre inférieur pour η, est lui-même une coupure.
II) Aucun élément de cet ensemble ne peut s'écrire comme produit d'un nombre supérieur pour ξ et d'un nombre supérieur pour η.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 54-55.

Définition 36 (multiplication) : La coupure construite dans le théorème précédent est notée $\xi \cdot \eta$ ($\cdot$ est lu "fois" et usuellement omis) et appelée le *produit* de ξ et η, ou la coupure obtenue par *multiplication* de ξ par η.

Théorème : La multiplication des coupures est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition des coupures.

Preuve. Landau, op. cit. p. 55.

Coupures

Théorème : Pour tout nombre rationnel donné r, l'ensemble de tous les nombres rationnels $< r$ constitue une coupure.

Preuve. Landau, op. cit. p. 56.

Définition 37 : La coupure construite dans le théorème précédent est notée r^*.

Théorème : $\xi \cdot 1^* = \xi$.

Preuve. Landau, op. cit. p. 56.

Coupures

Théorème : Pour toute coupure ξ donnée, l'équation

$$\xi\nu = 1^*$$

admet une solution ν.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 58-60.

Coupures

Théorème : L'équation

$$\eta\nu = \xi$$

où les coupure ξ et η sont données, admet exactement une solution ν.

Preuve. Landau, op. cit. p. 60.

Définition 38 (division) : La solution ν du théorème précédent est notée $\frac{\xi}{\eta}$ (lu "ξ sur η") et est appelée le *quotient* de ξ par η ou la coupure obtenue par *division* de ξ par η.

Coupures rationnelles et entières

Définition 39 : Une coupure de la forme x^* où x est un nombre rationnel est appelée une *coupure rationnelle*.

Définition 40 : Une coupure de la forme x^* où x est un nombre entier est appelée une *coupure entière*.

Coupures rationnelles et entières

Théorème : Soit x, y des nombres rationnels. Si

$$x > y, \text{ ou } x = y, \text{ ou } x < y$$

alors

$$x^* > y^*, \text{ ou } x^* = y^*, \text{ ou } x^* < y^*$$

respectivement, et réciproquement.

Preuve. Landau, op. cit. p. 61.

Coupures rationnelles et entières

Théorème : Si x, y sont des nombres rationnels, alors

$$\begin{aligned}
(x+y)^* &= x^* + y^* \\
(x-y)^* &= x^* - y^* \quad \text{si } x > y \\
(xy)^* &= x^* y^* \\
\left(\frac{x}{y}\right)^* &= \frac{x^*}{y^*}
\end{aligned}$$

Preuve. Landau, op. cit. pp. 61-63.

Coupures rationnelles et entières

Théorème : Les coupures entières vérifient les cinq axiomes des nombres naturels si le rôle de 1 est dévolu à 1^* et si l'on pose

$$(x^*)' = (x')^*.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 63.

Coupures rationnelles et entières

Comme $=$, $>$, $<$, somme, différence (lorsqu'elle existe), produit et quotient dans le domaine des coupures rationnelles correspondent tous aux concepts précédemment introduits pour les nombres rationnels, les coupures rationnelles possèdent toutes les propriétés des nombres rationnels ; en particulier, les coupures entières ont toutes les propriétés des entiers.

Par conséquent, on s'affranchit des nombres rationnels et on les remplace par les coupures rationnelles correspondantes ; dans la suite, on ne manipulera donc que des coupures (les nombres rationnels initiaux – classes d'équivalence de fractions – ne survivant que dans le concept de coupure).

Coupures rationnelles et entières

Définition 41 : Les lettres latines seront utilisées dorénavant pour les coupures rationnelles et entières, qu'on appellera nombres rationnels et entiers.

Théorème : Les nombres rationnels sont les coupures pour lesquelles il existe un plus petit nombre supérieur x. Ce x est alors la coupure.

Preuve. Landau, op. cit. p.64.

Coupures rationnelles et entières

Théorème : Soit ξ une coupure. Alors x est un nombre inférieur si et seulement si

$$x < \xi$$

et x est un nombre supérieur si et seulement si

$$x \geq \xi.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 64.

Coupures rationnelles et entières

Théorème : Si $\xi < \eta$, il existe un nombre rationnel z tel que

$$\xi < z < \eta.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 65.

Coupures rationnelles et entières

Théorème : Pour toute coupure ζ, l'équation

$$\xi\xi = \zeta$$

admet exactement une solution.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 65-67.

Coupures rationnelles et entières

Définition 42 : Toute coupure qui n'est pas un nombre rationnel est appelée un *nombre irrationnel*.

Théorème : Il existe un nombre irrationnel.

Preuve. On démontre, par l'absurde, que la solution de :

$$\xi\xi = 1'$$

est irrationnelle.

Preuve. Landau, op. cit. p. 67.

Nombres réels

Définition 43 : Les coupures seront dorénavant appelés **nombres positifs** ; ce que nous avons appelé "nombres rationnels" et "entiers" seront appelés **nombres rationnels positifs** et **entiers positifs**, respectivement.

Nous créons un nouveau nombre 0 (lu "zéro"), distinct des nombres positifs.

Nombres réels

Nous créons également des nombres distincts des nombres positifs et distincts de zéro et qu'on appellera "nombres négatifs", de façon à ce qu'à chaque nombre positif ξ soit associé un nombre négatif $-\xi$ (- est lu "moins") et que $-\xi$ et $-\eta$ soient considérés comme le même nombre si et seulement si ξ et η sont le même nombre.

Remarque (SL) : On peut prendre par exemple pour 0 l'ensemble $\emptyset$ et pour nombres négatif les couples $(\emptyset, \xi)$ où ξ est un nombre positif.

Nombres réels

La classe regroupant les nombres positifs, zéro et les nombres négatifs sera appelée classe des **nombres réels**.

On utilisera les lettres grecques α, β, γ... pour désigner les nombres réels, sauf exception.

Nombres réels

On définit la relation d'égalité $=$ comme étant celle d'identité. On a donc de façon immédiate le théorème suivant.

Théorème : La relation $=$ est une relation d'équivalence sur la classe des nombres réels.

On notera $\alpha \neq \beta$ pour signifier que α et β ne sont pas égaux.

Définition 44 :

$$|\alpha| = \begin{cases} \xi & \text{si} \quad \alpha = \xi \\ 0 & \text{si} \quad \xi = 0 \\ \xi & \text{si} \quad \alpha = -\xi \end{cases}$$

où ξ désigne un nombre positif. Le nombre $|\alpha|$ est appelé *valeur absolue* de α.

Nombres réels

Théorème : $|\alpha|$ est positif si α est positif ou négatif.

Preuve. Définition 44.

Définition 45 : Si α et β ne sont pas tous deux positifs, alors

$$\alpha > \beta$$

si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

i) α négatif, β négatif et $|\alpha| < |\beta|$

ii) $\alpha = 0$, β négatif

iii) α positif, β négatif

iv) α positif, $\beta = 0$.

($>$ est lu "supérieur à").

Notons que si α et β sont tous deux des nombres positifs (i.e. des coupures), on dispose déjà des concepts $>$ et $<$, ce dernier ayant été d'ailleurs utilisé dans i).

Nombres réels

Définition 46 : $\alpha < \beta$ signifie $\beta > \alpha$.
($<$ est lu "est inférieur à").

Notons que la Définition 46 est compatible avec celle donnée pour les coupures.

Nombres réels

Théorème : Pour tous nombres réels α, β donnés, exactement l'une des assertions suivantes :

$$\alpha = \beta, \quad \alpha > \beta, \quad \alpha < \beta$$

est vraie.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 70-71.

Définition 48 : $\alpha \geq \beta$ signifie $\alpha > \beta$ ou $\alpha = \beta$.
($\geq$ est lu "supérieur ou égal").

Définition 49 : $\alpha \leq \beta$ signifie $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$.
($\leq$ est lu "inférieur ou égal").

Théorème : Si $\alpha \geq \beta$ alors $\beta \leq \alpha$, et réciproquement.

Preuve. Définition 46.

Nombres réels

Théorème : Les nombres positifs sont les nombres qui sont > 0, les nombres négatifs sont les nombres qui sont < 0.

Preuve. Landau, op. cit. p. 72.

Nombres réels

Théorème : Pour tout nombre réel α, $|\alpha| \geq 0$.

Preuve. Landau, op. cit. p. 72.

Théorème : Les relations $<$ et $\leq$ sont transitives.

Preuve. Landau, op. cit. p. 73.

Nombres réels

Théorème : La relation $\leq$ est une relation d'ordre totale sur la classe des nombres réels.

Preuve. Immédiat d'après la définition de $\leq$ et les résultats précédents.

Définition 49 : Si $\alpha \leq 0$, alors on dira que α est **rationnel** si l'on a soit

$$\alpha = 0$$

soit

$$\alpha < 0 \quad \text{avec} \quad |\alpha| \quad \text{rationnel.}$$

Définition 50 : Si $\alpha < 0$ alors α est dit **irrationnel** s'il n'est pas rationnel.

On dispose donc à présent de nombres irrationnels positifs et négatifs. **Plusieurs ?** Oui, car on dispose déjà d'un irrationnel ξ et le nombre positif $\xi + x$ est toujours irrationnel lorsque x est rationnel puisque

$$\xi + x = y$$

impliquerait

$$\xi = y - x.$$

De même, $-(\xi + x)$ es toujours irrationnel négatif.

Nombres réels

Définition 51 : Si $\alpha \leq 0$, alors α est dit **entier** si l'on a

$$\alpha = 0$$

ou

$$\alpha < 0, \quad \text{avec} \quad |\alpha| \quad \text{entier.}$$

Théorème : Tout nombre entier est rationnel.

Preuve. Landau op. cit. p. 74.

Définition 52 (addition) :

$$\alpha+\beta = \begin{cases} -(|\alpha| + |\beta|) \quad \text{si} \quad \alpha < 0, \beta < 0 \\ \left.\begin{array}{c} |\alpha| - |\beta| \\ 0 \\ -(|\alpha| - |\beta|) \end{array}\right\} \quad \text{si} \quad \alpha > 0, \beta < 0, \begin{cases} |\alpha| > |\beta| \\ |\alpha| = |\beta| \\ |\alpha| < |\beta| \end{cases} \\ \beta + \alpha \quad \text{si} \quad \alpha < 0, \beta > 0 \\ \alpha \quad \text{si} \quad \beta = 0 \\ \beta \quad \text{si} \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

(+ est lu "plus").

$\alpha + \beta$ est appelé la *somme* de α et β ou le nombre obtenu par *addition* de α et β.

Remarques : 1) Pour $\alpha > 0, \beta > 0$, on dispose déjà du concept d'addition de coupures.
2) Ce même concept est utilisé dans la définition précédente.
3) Le troisième cas de la définition précédente utilise le concept de somme introduit dans le deuxième cas.
4) Les quatrième et cinquième cas se rencontrent pour

$$\alpha = \beta = 0$$

mais le résultat est le même dans les deux cas (zéro).

Théorème : L'addition des nombres réels est commutative.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 75-76.

Définition 53 :

$$-\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha = 0 \\ |\alpha| & \text{si} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

(- est lu "moins").

Notons que pour $\alpha > 0$, on dispose du concept $-\alpha$ issu de la définition des nombres réels.

Théorème : Si

$$\alpha > 0, \quad \text{ou} \quad \alpha = 0, \quad \text{ou} \quad \alpha < 0,$$

alors

$$-\alpha < 0, \quad \text{ou} -\alpha = 0, \quad \text{ou} -\alpha > 0,$$

respectivement.

Preuve. Définition 43 et Définition 53.

Théorème : $(-(-\alpha)) = \alpha$.

Preuve. Définitions 43, 44 et 53.

Théorème : $|-\alpha| = |\alpha|$.

Preuve. Définitions 43, 44 et 53.

Théorème : $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Preuve. Définition 52, 53 et théorème précédent.

Nombres réels

Théorème : $-(\alpha+\beta) = -\alpha + (-\beta)$.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 76-77.

Définition 53 : $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.
(- est lu "moins")
$\alpha - \beta$ est appelé la *différence* α moins β ou le nombre obtenu par *soustraction* de β de α.

Notons que cette définition est cohérente avec la définition de la soustraction pour les coupures dans le cas

$$\alpha > \beta > 0.$$

En effet, on a dans ce cas $\alpha > 0$, $-\beta < 0$, $|\alpha| > |-\beta|$ et donc $\alpha + (-\beta) = \alpha - |-\beta| = \alpha - \beta$.

Nombres réels

Théorème : $-(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$.

Preuve. Laudau, op. cit. p. 78.

Théorème : Si

$\alpha - \beta > 0$, ou $\alpha - \beta = 0$, ou $\alpha - \beta < 0$

alors,

$$\alpha > \beta, \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta, \quad \text{ou} \quad \alpha < \beta,$$

respectivement, et réciproquement.

Preuve. Landau, op. cit. p. 78.

Nombres réels

Théorème : Si

$$\alpha > \beta, \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta, \quad \text{ou} \quad \alpha < \beta$$

alors

$$-\alpha < -\beta, \quad \text{ou} \quad -\alpha = -\beta, \quad \text{ou} \quad -\alpha > -\beta,$$

respectivement, et réciproquement.

Preuve. Landau, op. cit. p. 79.

Nombres réels

Théorème : Tout nombre réel peut être représenté comme la différence de deux nombres positifs.

Preuve. 1) Si $\alpha > 0$, alors $\alpha = (\alpha + 1) - 1$.
2) Si $\alpha = 0$, alors $\alpha = 1 - 1$.
3) Si $\alpha < 0$, alors

$$-\alpha = |\alpha| = (|\alpha| + 1) - 1$$

et

$$\alpha = -((|\alpha| + 1) - 1) = 1 - (|\alpha| + 1).$$

Nombres réels

Théorème : Si

$$\alpha = \xi_1 - \xi_2, \quad \beta = \eta_1 - \eta_2$$

où $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ sont des nombres positifs, alors :

$$\alpha + \beta = (\xi_1 + \eta_1) - (\xi_2 + \eta_2).$$

Preuve. Landau, op. cit. pp. 79-81.

Nombres réels

Théorème : L'addition des nombres réels est associative.

Preuve. Landau, op. cit. p. 81.

Théorème : Pour tous nombres réels α, β, l'équation

$$\beta + \gamma = \alpha$$

admet exactement une solution γ ; explicitement :

$$\gamma = \alpha - \beta.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 82.

Définition 55 (multiplication) :

$$\alpha\cdot\beta = \begin{cases} -(|\alpha|\,|\beta|) & \text{si} \quad \alpha > 0, \beta < 0 \quad \text{ou} \quad \alpha < 0, \beta > 0 \\ |\alpha|\,|\beta| & \text{si} \quad \alpha < 0, \beta < 0 \\ 0 & \text{si} \quad \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = 0. \end{cases}$$

($\cdot$ est lu "fois" mais est usuellement omis) $\alpha \cdot \beta$ est appelé le *produit* de α par β ou le nombre obtenu par *multiplication* de α par β.

Notons que le produit $\alpha \cdot \beta$ dans le cas $\alpha > 0, \beta > 0$ a été défini précédemment, un fait utilisé dans la définition précédente.

Nombres réels

Théorème : On a

$$\alpha\beta = 0$$

si et seulement si au moins l'un des deux nombres α, β est zéro.

Preuve. Définition 55.

Théorème : $|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$.

Preuve. Définition 55.

Nombres réels

Théorème : La multiplication des nombres réels est commutative.

Preuve. Landau, op. cit. p. 84.

Théorème : $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

Preuve. Landau, op. cit. p. 84.

Nombres réels

Théorème : Si

$$\alpha \neq 0, \beta \neq 0,$$

alors,

$$\alpha\beta = |\alpha|\,|\beta| \quad \text{ou} \quad \alpha\beta = -(|\alpha|\,|\beta|),$$

où la première alternative est vraie si aucun des deux nombres α, β ou tous les deux sont négatifs, et la deuxième si exactement l'un de ces deux nombres est négatif.

Preuve. Définition 55.

Nombres réels

Théorème : $(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$.

Preuve. Landau, op. cit. p. 85.

Théorème : $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$.

Preuve. Landau, op. cit. p. 85.

Nombres réels

Théorème : La multiplication des nombres réels est associative.

Preuve. Landau, op. cit. p. 85.

Nombres réels

Théorème : $\xi(\eta - \zeta) = \xi\eta - \xi\zeta$ où ξ, η, ζ sont des nombre positifs quelconques.

Théorème : La multiplication des nombres réels est distributive par rapport à l'addition des réels.

Preuve. Landau, op. cit. p. 86.

Théorème : $\alpha(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$ où α, β, γ sont des nombres réels quelconques.

Preuve. Landau, op. cit. p. 86.

Nombres réels

Théorème : L'équation

$$\alpha\gamma = \beta$$

où α, β sont donnés et où

$$\alpha \neq 0$$

admet exactement une solution γ.

Preuve. Landau, op. cit. p. 87.

Définition 56 : Le γ du théorème précédent est noté $\frac{\beta}{\alpha}$ (lu "β sur α") et appelé le *quotient* de β par α ou le nombre obtenu par *division* de β par α.

Notons que si $\alpha > 0, \beta > 0$, cette définition est cohérente avec celle donnée pour les coupures.

Théorème fondamental de Dedekind : Soit donnée une partition quelconque de tous les nombres réels en deux classes ayant les propriétés suivantes :
1) Il existe un nombre dans la première classe et il existe un nombre dans la deuxième classe ;
2) Tout nombre de la première classe est inéfrieur à tout nombre de la deuxième classe.
Alors, il existe exactement un nombre réel α tel que tout nombre réel $\beta < \alpha$ appartienne à la première classe et tout nombre réel $\beta > \alpha$ appartienne à la deuxième classe.

En d'autre termes, tout nombre de la première classe est $\leq \alpha$ et tout nombre de la deuxième classe est $\geq \alpha$.

Remarque : Réciproquement, il est clair que tout nombre réel α engendre exactement deux telles partitions. L'une a pour première classe tous les $\beta \leq \alpha$ et comme deuxième classe tous les $\beta > \alpha$; l'autre a pour première classe tous les $\beta < \alpha$ et pour deuxième classe tous les $\beta \geq \alpha$.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 89-9.

C'est sur ce théorème fondamental et cette remarque que s'achève notre construction des nombres réels et l'établissement de leurs propriétés. Celles-ci montrent en fait que la classe des nombres réels est un **corps totalement ordonné**.

Nombres surréels : introduction

Nous allons dans la suite construire une classe de nombres introduite par John Conway dans le cadre de l'étude du jeu de Go et, plus généralement, des jeux combinatoires, dont des exemples classiques sont le jeu de Go, le jeu d'Echecs et le jeu de Nim.

Ces nombres ont été qualifiés de "surréels" par Donald Knuth dans son livre "Surreal Numbers : How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness", paru en 1974.

Notre exposé sera basé sur la Partie 0 de l'ouvrage de John Conway "On Numbers and Games", paru en 1976 (2ème édition 2000) et sur des exemples vérifiés issus de la page Wikipédia - *Surreal Numbers*.

Nombres surréels : introduction

La construction des nombres surréels est analogue à la construction des nombres réels via les coupures de Dedekind, mais utilise le concept de *récurrence transfinie*.

Elle repose sur la construction de nouveaux nombres à partir de deux ensembles de nombres déjà construits, L et R (L pour left et R pour right), éventuellement vides.

Le nouveau nombre ainsi construit, noté $\{L|R\}$, sera plus grand que tout nombre de L et plus petit que tout nombre de R, selon un ordre qui sera défini plus loin.

Pour que cela soit possible, on impose une restriction sur L et R : il faut que chaque nombre de L soit plus petit que chaque nombre de R.

Nombres surréels : introduction

Dans le contexte des nombres surréel, une paire ordonnée d'ensembles (L, R) est notée $\{L|R\}$.

Quand un ensemble est vide, il est simplement omis.

Quand un ensemble est décrit par la liste de ces éléments, les accolades sont omises.

Quand une union d'ensembles est prise, elle est représentée par la virgule.

Par exemple, au lieu de $(L_1 \cup L_2 \cup \{0, 1, 2\}, \emptyset)$, on note $\{L_1, L_2, 0, 1, 2| \}$.

Nombres surréels : introduction

Dans l'approche de Conway, les nombres surréels sont construits de façon récursive, de même qu'un ordre total $\leq$.

Différents ensembles peuvent définir le même nombre : $\{L|R\}$ et $\{L'|R'\}$ peuvent définir le même nombre même si $L \neq L'$ et $R \neq R'$. C'est analogue avec ce qui se passe pour les nombres rationnels : 1/2 et 2/4 représentent le même nombre.

Ainsi, les nombres surréels sont en fait des *classes d'équivalence* de représentations de la forme $\{L|R\}$ qui désignent le même nombre.

Nombres surréels : introduction

Lors de la première étape de construction, on ne dispose d'aucun nombre préalablement défini, donc on utilise l'ensemble vide : $\{\ |\ \}$.

Cette représentation est notée 0.

Les étapes suivantes engendrent des représentations telles que :

$$\begin{aligned} \{0|\} &= 1 \\ \{1|\} &= 2 \\ \{2|\} &= 3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \{|0\} &= -1 \\ \{|-1\} &= -2 \\ \{|-2\} &= -3 \end{aligned}$$

Nombres surréels : introduction

De fait, les entiers font partie des nombres surréels.

Mais, attention, les identités précédentes sont des *définitions*, en ce sens que le terme de droite est une *notation* du terme de gauche.

La cohérence de ces notations est établie en définissant les opérations arithmétiques usuelles sur les surréels, ce qui sera fait dans la suite.

Nombres surréels : introduction

D'autre représentations apparaissent en un nombre fini d'étapes, telles que :

$$\begin{aligned} \{0|1\} &= 1/2 \\ \{0|1/2\} &= 1/4 \\ \{1/2|1\} &= 3/4 \end{aligned}$$

Plus généralement, tous les nombres rationnels dyadiques (i.e. dont le dénominateur est une puissance de 2) font partie des nombres surréels.

Nombres surréels : introduction

Après un nombre *infini* d'étapes (on verra comment), on dispose d'ensembles infinis.

Il s'avère alors que tout nombre réel x peut être représenté sous la forme $\{L_x|R_x\}$, où L_x est l'ensemble des rationnels dyadiques inférieurs à x et R_x l'ensemble des rationnels dyadiques supérieurs à x, ce qui ressemble à une coupure de Dedekind.

Ainsi, les nombres réels font également partie des surréels.

Nombres surréels : introduction

On obtient également des représentations telles que :

$$\begin{aligned}\{0, 1, 2, 3, ...|\ \} &= \omega \\ \{0|1, 1/2, 1/4, 1/8, ...\} &= \varepsilon\end{aligned}$$

où ω est le premier nombre ordinal transfini supérieur à tous les entiers et où ε est un infinitésimal supérieur à 0 mais inférieur à tout nombre réel positif.

Nombres surréels : introduction

De plus, les opérations arithmétiques standard (addition, soustraction, multiplication et division) peuvent être étendues à ces nombres non-réels de façon à faire des nombres surréels un **corps totalement ordonné** ; on pourra donc parler de 2ω, $\omega - 1$, etc.

Après cette introduction, passons à la construction détaillée des nombres surréels.

Nombres surréels : construction

La construction des nombres surréels consiste en trois parties indépendantes : la **règle de construction**, la **règle de comparaison** et la **règle d'équivalence**.

Définition 1 (forme) : Une **forme** est une paire ordonnée d'ensembles de nombres surréels, appelés son *ensemble gauche* et son *ensemble droite*.
Une forme d'ensemble gauche L et d'ensemble droite R est notée $\{L|R\}$.

Remarque : L'ensemble gauche et droite peuvent tous deux être vides. La forme $\{\{\,\}|\{\,\}\}$ est également notée $\{|\}$.

Nombres surréels : construction

Définition 2 (règle de construction) : Une forme $\{L|R\}$ est **numérique** si l'intersection de L et R est l'ensemble vide et si chaque élément de R est supérieur à tout élément de L selon la relation d'ordre $\leq$ donnée par la **règle de comparaison** à suivre.

Les formes numériques sont regroupées en classes d'équivalence définies ci-après ; chaque classe d'équivalence est un **nombre**.

Nombres surréels : construction

Définition 3 (règle d'équivalence) : Deux formes numériques x and y sont des formes du même nombre (appartiennent à la même classe d'équivalence) si et seulement si $x \leq y$ et $y \leq x$.

Nombres surréels : construction

Définition 4 (zéro) : La classe d'équivalence contenant $\{ \mid \}$ est notée 0 ; en d'autres termes, $\{ \mid \}$ est une forme du nombre surréel 0.

Nombres surréels : construction

La définition récursive des nombres surréels est achevée à l'aide de la règle de comparaison :

Définition 5 (règle de comparaison) : Etant donné deux formes numériques $x = \{X_L|X_R\}$ et $y = \{Y_L|Y_R\}$, on note $x \leq y$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vraies :
1) Il n'existe pas de $x_L \in X_L$ tel que $y \leq x_L$;
2) Il n'existe pas de $y_R \in Y_R$ tel que $y_R \leq x$.

Nombres surréels : construction

Remarque : La relation d'ordre stricte $<$ est définie de façon usuelle à partir de $\leq$: $x < y$ si et seulement si $x \leq y$ et $y \not\leq x$.

Ainsi, les nombres surréels peuvent être comparés (ou comparés aux formes numériques) en choisissant une forme numérique dans la classe d'équivalence correspondant à chaque nombre.

Nombres surréels : construction

Remarque :
Les définitions précédentes sont *récursives* et requièrent une forme de récurrence pour définir l'univers des objets (formes et nombres) qui y apparaissent.
Les seuls nombres surréels attaignables par *récurrence finie* sont les nombres rationnels dyadiques (c'est-à-dire dont le dénominateur est une puissance de 2) ; un univers plus vaste est accessible via le principe de *récurrence transfinie* (que nous ne présenterons pas et n'utiliserons pas au niveau de rigueur de notre exposé).

Nombres surréels : construction

Définition 6 (générations) :
1) Etant donné un nombre ordinal n,la **génération** S_n est l'ensemble de tous les nombres surréels générés par la règle de construction à partir de sous-ensembles de $\bigcup_{i<n} S_i$.
2) Il existe une génération $S_0 = \{0\}$, dans laquelle 0 consiste en la seule forme $\{\ |\ \}$.

Nombres surréels : construction

La première itération de la règle de construction produit trois formes numériques

$$\{\ |0\} < \{\ |\ \} < \{0|\}$$

(la forme $\{0|0\}$ n'est pas numérique car $0 \leq 0$).

La classe d'équivalence contenant $\{0|\}$ est notée 1 et celle contenant $\{|0\}$ est notée -1.

Nombres surréels : construction

Ces trois notations ont une signification spécifique dans un anneau ; elles correspondent à l'identité pour l'addition (0), l'identité pour la multiplication (1) et à l'inverse additif de 1 (-1).

Les opérations arithmétiques définies dans la suite seront cohérentes avec ces notations.

Nombres surréels : construction

Pour tout $i < n$, comme toute forme numérique de S_i est également une forme numérique de S_n, tous les nombres de S_i apparaissent également dans S_n (comme surensembles de leur représentation dans S_i).

Nombres surréels : construction

On dit des nombres de S_n qui sont des sur-ensembles de nombres de S_i qu'ils ont été **hérités** de la génération i.

La plus petite valeur de n pour laquelle un nombre surréel donné apparait dans S_n est appelé sa **date anniversaire** (ang. birth-day).

Par exemple, la date anniversaire de 0 est 0 et celle de -1 est 1.

Nombres surréels : construction

Une seconde itération de la règle de construction donne les formes numériques suivantes :

$$\begin{array}{cccl}
 & \{|-1\} & = & \{|-1,0\} = \{|-1,1\} = \{|-1,0,1\} \\
< & \{|0\} & = & \{|0,1\} \\
< & \{-1|0\} & = & \{-1|0,1\} \\
< & \{\,|\,\} & = & \{-1|\} = \{|1\} = \{-1|1\} \\
< & \{0|1\} & = & \{-1,0|1\} \\
< & \{0|\} & = & \{-1,0|\} \\
< & \{1|\} & = & \{0,1|\} = \{-1,1|\} = \{-1,0,1|\}
\end{array}$$

Nombres surréels : construction

Remarques :

1) Les comparaisons des classes d'équivalence sont cohérentes, indépendamment du choix des formes.

On a en fait le théorème suivant :

Théorème : La classe d'équivalence d'une forme dépend uniquement de l'élément maximal de son ensemble gauche et de l'élément minimal de son ensemble droite.

Preuve. Conway, 1976, pp. 8-9.

Ainsi, le nombre $\{1,2|5,8\}$ est équivalent à $\{2|5\}$.

2) On interprète, de façon informelle, $\{1|\}$ et $\{|-1\}$ comme "le nombre juste après 1" et "le nombre juste avant -1", respectivement ; leurs classes d'équivalences sont notées 2 et -2.

3) On interprète, de façon informelle, $\{0|1\}$ et $\{-1|0\}$ comme "le nombre a mi-chemin entre 0 et 1" et "le nombre à mi-chemin entre -1 et 0", respectivement ; leurs classes d'équivalences sont notées 1/2 et -1/2.

4) Ces notations seront justifiées par les définitions de l'addition et de la multiplication des surréels, données ci-après.

Nombres surréels : construction

5) On retient les nouvelles notations introduites à chaque génération aux générations suivantes ; on a par exemple avec cette convention :

$$-2 < -1 < -1/2 < 0 < 1/2 < 1 < 2.$$

et on peut vérifier, par exemple, que $\{2|5\}$ est une forme de 3 à l'aide de la **propriété de la date anniversaire**, donnée ci-après.

Nombres surréels : construction

Théorème (propriété de la date anniversaire) :
1) Les ensembles gauche et droite L et R sont séparés par un nombre d'une génération antérieure si et seulement si $x = \{L|R\}$ est un nombre hérité.
2) Si x est un nombre hérité, il existe une plus petite génération i et exactement un nombre c, dont i est le jour anniversaire, qui se situe entre L et R ; x est alors une forme de c.

Preuve. Conway, op. cit. p. 23.

Nombres surréels : construction

L'addition, la négation (inverse additif) et la multiplication de formes de nombres surréels $x = \{X_L | X_R\}$ et $y = \{Y_L | Y_R\}$ sont définies par trois formules récursives.

Définition 7 (négation) : La négation dun nombre $x = \{X_L | X_R\}$ est définie par

$$-x = -\{X_L \mid X_R\} = \{-X_R \mid -X_L\},$$

où la négation d'un ensemble S est l'ensemble des négations de ses éléments : $-S = \{-s : s \in S\}$.

Nombres surréels : construction

Définition 8 (addition) : L'addition est définie récursivement par

$$\begin{aligned} x + y &= \{X_L \mid X_R\} + \{Y_L \mid Y_R\} \\ &= \{X_L + y, x + Y_L \mid X_R + y, x + Y_R\}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} X + y &= \{x' + y : x' \in X\} \\ x + Y &= \{x + y' : y' \in Y\} \end{aligned}$$

Nombres surréels : construction

Exemple :

$$1/2 + 1/2 = \{0|1\} + \{0|1\} = \{1/2|3/2\},$$

qui, par la propriété de la date anniversaire, est une forme de 1.

Cela justifie les notations introduites précédemment.

Nombres surréels : construction

Définition 9 (soustraction) :

La soustraction est définie à partir de l'addition et de la négation :

$$\begin{aligned} x - y &= \{X_L \mid X_R\} + \{-Y_R \mid -Y_L\} \\ &= \{X_L - y, x - Y_R \mid X_R - y, x - Y_L\} \end{aligned}$$

Nombres surréels : construction

Définition 10 (multiplication) :
La multiplication est définie récursivement par la formule :

$$
\begin{aligned}
xy &= \{X_L \mid X_R\}\{Y_L \mid Y_R\} \\
&= \{X_L y + xY_L - X_L Y_L, X_R y + xY_R - X_R Y_R \mid \\
&\quad X_L y + xY_R - X_L Y_R, xY_L + X_R y - X_R Y_L\}
\end{aligned}
$$

Nombres surréels : construction

Remarque :

Les formules du type

$$X_R y + x Y_R - X_R Y_R$$

doievent être comprises comme :

$$\Big\{x'y + xy' - x'y' : x' \in X_R,\ y' \in Y_R\Big\}.$$

Nombres surréels : construction

Example :

$$1/2 \cdot 1/2 = \{0|1\} \cdot \{0|1\} = \{0|1/2\} = 1/4.$$

Définition 11 (division) : La division est définie à partir du réciproque et de la multiplication :

1) Pour y positif :

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$$

avec

$$\frac{1}{y} = \left\{ 0, \frac{1 + (y_R - y)\left(\frac{1}{y}\right)_L}{y_R}, \frac{1 + (y_L - y)\left(\frac{1}{y}\right)_R}{y_L} \;\middle|\; \frac{1 + (y_L - y)\left(\frac{1}{y}\right)_L}{y_L}, \frac{1 + (y_R - y)\left(\frac{1}{y}\right)_R}{y_R} \right\}$$

2) Pour y négatif, $1/y$ est défini par

$$\frac{1}{y} = -\left(\frac{1}{-y}\right)$$

3) Si $y = 0$, alors $1/y$ n'est pas défini.

Nombres surréels : construction

Théorème : Les opérations de négation, d'addition et de multiplication, appliquées à des nombres surréels, donnent des nombres surréels et la classe des nombres surréels, munie de ces opérations, est un **corps** totalement ordonné ayant pour identité additive $0 = \{\ |\ \}$ et pour identité multiplicative $1 = \{0|\}$.

Preuve. Conway, op. cit. pp. 16-22.

Nombres surréels : compléments

La règle de construction peut être itérée un nombre fini de fois pour obtenir de nouvelles générations de surréels :

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \{0\} \\
S_1 &= \{-1 < 0 < 1\} \\
S_2 &= \{-2 < -1 < -1/2 < 0 < 1/2 < 1 < 2\} \\
S_3 &= \{-3 < -2 < -3/2 < -1 < -3/4 < \\
&\quad -1/2 < -1/4 < 0 < 1/4 < 1/2 < 3/4 \\
&\quad < 1 < 3/2 < 2 < 3\} \\
S_4 &= \{-4 < -3 < ... < -1/8 < 0 < 1/8 < 1/4 < 3/8 \\
&\quad < 1/2 < 5/8 < 3/4 < 7/8 < 1 < 5/4 < 3/2 < 7/4 \\
&\quad < 2 < 5/2 < 3 < 4\}
\end{aligned}
$$

Nombres surréels : compléments

Théorème : Pour tout nombre naturel (ordinal fini) n, tous les nombres de S_n sont des fractions dyadiques, i.e. peuvent s'écrire comme une fraction irréductible de la forme $a/2^b$, où a et b sont des entiers, avec $0 \leq b < n$.

Preuve. Conway, op. cit. pp. 23-24.

Nombres surréels : compléments

L'ensemble de tous les nombres appartenant à un S_n pour n fini est noté :

$$S_* = \bigcup_{n\in\omega} S_n.$$

Définissons S_ω comme l'ensemble de tous les nombres surréels construits à partir de sous-ensembles de S_*.

Un nombre infini positif unique apparaît dans S_ω :

$$\omega = \{S_* \mid \} = \{1, 2, 3, 4, \ldots \mid \}.$$

S_ω contient également des objets qui peuvent être identifiés aux rationnels.

Par exemple :

$$\tfrac{1}{3} = \{y \in S_* : 3y < 1 \mid y \in S_* : 3y > 1\}.$$

Nombres surréels : compléments

S_ω ne contient pas seulement l'ensemble des rationnels mais également l'ensemble des réels. Par rexemple,

$$\pi = \left\{ 3, \frac{25}{8}, \frac{201}{64}, \ldots \mid 4, \frac{7}{2}, \frac{13}{4}, \frac{51}{16}, \ldots \right\}.$$

Nombres surréels : compléments

Les seuls nombres infinis de S_ω sont ω et $-\omega$; mais il y a d'autres nombres non-réels dans S_ω, répartis parmi les réels.

Considérons le plus petit nombre positif de S_ω :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left\{0 \mid 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots\right\} \\ &= \{0 \mid y \in S_* : y > 0\}.\end{aligned}$$

Ce nombre est supérieur à zéro mais inférieur à toute fraction dyadique positive.

C'est donc un nombre **infinitésimal**, souvent noté ε.

Nombres surréels : compléments

Les seuls infinitésimaux "purs" de S_ω sont ε et son inverse additif $-\varepsilon$; en les additionnant aux fractions dyadiques, on obtient les nombres $y \pm \varepsilon$, qui appartiennent également à S_ω.

Nombres surréels : compléments

Poursuivre la récursion au-delà de S_ω produit de nouveaux nombres ordinaux α, chacun correspondant au plus grand nombre surréel de date anniversaire α.

Le premier ordinal ainsi obtenu est

$$\omega + 1 = \{\omega|\}.$$

On obtient un autre nombre infini positif à la génération $\omega + 1$:

$$\omega - 1 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...|\omega\}.$$

Le nombre surréel $\omega - 1$ n'est **pas** un ordinal ; l'ordinal ω n'est le successeur d'aucun ordinal.

Il s'agit d'un nombre surréel de date anniversaire $\omega + 1$, noté $\omega - 1$ car il coïncide avec la somme de $\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, ...|\}$ et $-1 = \{|0\}$.

Nombres surréels : compléments

De même, il y a deux nouveau infinitésimaux à la génération $\omega + 1$:

$2\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon = \{\varepsilon | 1+\varepsilon, 1/2+\varepsilon, 1/4+\varepsilon, 1/8+\varepsilon, ...\}$

et

$$\varepsilon/2 = \varepsilon \cdot 1/2 = \{0|\varepsilon\}.$$

Nombres surréels : compléments

Aux étapes suivantes de la récursion, on obtient des nombres supérieurs à $\omega+k$ pour tous les nombres naturels k :

$$2\omega = \omega + \omega = \{\omega+1, \omega+2, \omega+3, \omega+4, ...|\}$$

Nombres surréels : compléments

Ce nombre peut être noté $\omega+\omega$ car il coïncide avec la somme surréelle de ω et ω ;

Il est également noté 2ω car il coïncide avec l eproduit surréel de $\omega = \{1, 2, 3, 4, ...|\}$ et $2 = \{1|\}$.

Nombres surréels : compléments

On obtient également un nombre surréel $\omega/2$ qui est infini mais inférieur à $\omega - n$ pour tout nombre naturel n.

Plus précisément, $\omega/2$ est défini par

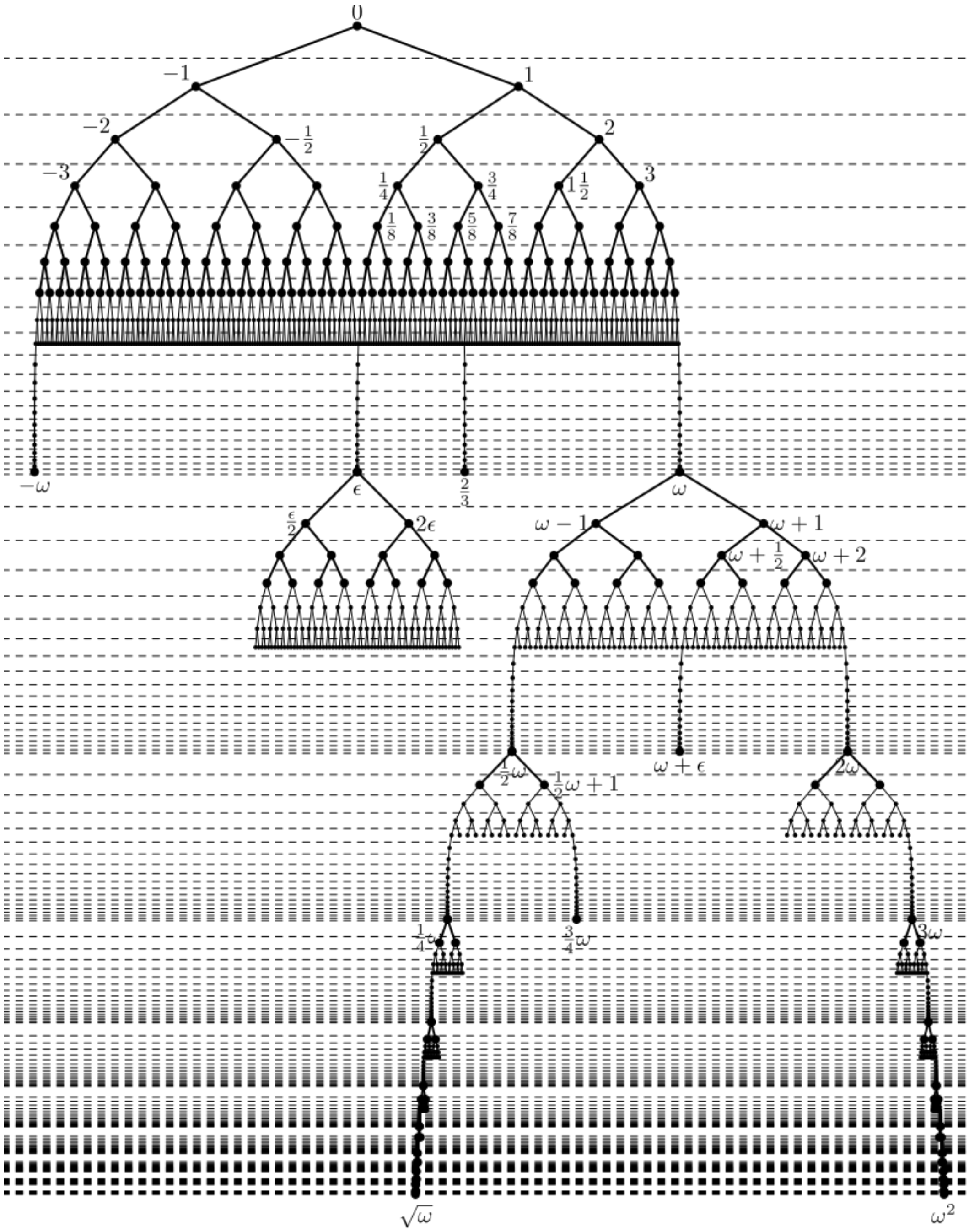
$$\omega/2 = \{S_* | \omega - S_*\}$$

où la notation $x - Y$ signifie $\{x - y : y \in Y\}$.

Il peut être identifié au produit de ω et de la forme $\{0|1\}$ de 1/2.

Nombres surréels : compléments

La classe des nombres surréel est généralement visualisée par le graphique suivant (source *Wikipédia* - Surreal Numbers) :



Bibliographie

Dieudonné, J. (1969) *Eléments d'Analyse 1*, Gauthier-Villars.

Knuth D. (1974) *Surreal Numbers : How Two Ex-Students Turned On to Pure Mathematics and Found Total Happiness*, Addison-Wesley.

Conway, J. (1976) *On Numbers and Games*, 2éd. 2000, A.K. Peters/CRC Press.

Halmos, P. R. (1997) *Introduction à la Théorie des Ensembles*, Jacques Gabay.

Landau, E. (1966) *Foundations of Analysis*, Chelsea Publishing Company.

Wikipedia (2024) *Surreal Numbers*.