Histoire des Mathématiques

Des nombres de Cantor et de Dedekind aux nombres de Conway

Partie 0. Nombres ordinaux, nombres rationnels et nombres entiers

Salim Lardjane
Maître de Conférences
Université Bretagne Sud

"C'est enfin parce que le Nombre existe d'une existence substantielle que la raison le conçoit et s'en sert pour nombrer les objets".

Plotin (205-270)
Sixième Ennéade, Livre Sixième, X

"Les nombres sont de libres créations de l'esprit humain, ils servent comme moyen permettant de saisir avec plus de facilité et de précision la diversité des choses."

Richard Dedekind (1831-1916)
Was sind und was sollen die Zahlen ? (1888)

"Paradoxe. Nous vivons le temps du despotisme du nombre, la pensée plie sous la loi des multiplicités dénombrables, et cependant (à moins que précisément ce défaut, cette défaillance, ne soient que l'envers obscur d'une soumission sans concept) nous ne disposons d'aucune idée récente, active, de ce que c'est qu'un nombre. Il y a eu sur ce point un effort immense, mais pour l'essentiel achevé dès le début du siècle : celui de Dedekind, de Frege, de Cantor, de Peano. L'impact factuel du nombre n'escorte qu'un silence du concept.

La question de Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, publique en 1888, comment l'entendre aujourd'hui ? A quoi servent les nombres, nous le savons : ils servent, au sens strict, à tout, ils norment le Tout. Mais que sont-ils, nous l'ignorons ou nous répétons ce que les grands penseurs de la fin du XIXème siècle, anticipant sans doute l'étendue de sa juridiction, ont dit qu'ils étaient."

Alain Badiou (1937-)
Le Nombre et les nombres (1990)
Chapitre 0, section 0.1.

"Les nombres

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

sont appelés les *entiers relatifs*, ou simplement *les entiers* ; les nombres

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

sont appelés les *entiers non-négatifs* ; et les nombres

$$1, 2, 3, \ldots$$

les *entiers positifs*. Les entiers positifs constituent le principal sujet de l'arithmétique, mais il est souvent essentiel de les considérer comme une sous-classe des entiers ou d'une classe plus large de nombres."

G. H. Hardy (1877-1947)
E. M. Wright (1906-2005)

An introduction to the Theory of Numbers
(1938, 5ème ed. 1979)
Chapitre I, section 1.1.

Propos de l'exposé

Cet exposé d'histoire des mathématiques, en deux parties, est une motivation et une présentation du Chapitre 0 de la partie 0 (pages 2 à 14) du livre de John Conway "On Numbers and Games" (1976, 2ème édition 2000).

Nous partirons de la construction des nombres ordinaux de Georg Cantor (1895) donnée par Paul R. Halmos (1965) – à la suite de John Von Neumann (1923) – et de la construction des nombres réels par Edmund Landau (1927) – à la suite de Richard Dedekink (1887) – et présenterons leur généralisation par John Conway (1976).

Propos de l'exposé

La caractère introductif de l'exposé nous limitera quand au degré de rigueur mathématique adopté.

Il s'agira d'un parcours "en surface" ou "naïf" (Halmos 1965) de notions connectées en profondeur aux axiomatiques de la Théorie de Ensembles.

L'objectif de l'exposé est d'introduire *rapidement* les constructions quelque peu méconnues d'objets mathématiques aujourd'hui anciens, qui pourront faire l'objet d'un ou plusieurs autres exposés plus rigoureux et plus détaillés si l'audience l'estime souhaitable.

Prérequis

Rappelons quelques notions de Théorie des Ensembles (reprises pour partie telles quelles de Dieudonné (1960, trad. 1962, éd. 1969)) :

Si P est une propriété (un prédicat) telle que les x pour lesquels $P(x)$ est vraie constituent un ensemble, alors on désigne cet ensemble par :

$$\{x|P(x)\}.$$

Etant donné un ensemble X et une propriété P, il existe un sous-ensemble unique de X dont les éléments sont *tous* les éléments $x \in X$ pour lesquels $P(x)$ est vraie ; ce sous-ensemble d'écrit $\{x \in X|P(x)\}$ (**axiome de sélection**).

Prérequis

La relation $\{x \in X | P(x)\} \subset \{x \in X | Q(x)\}$ est équivalente à $(\forall x \in X)\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$.

La relation $\{x \in X | P(x)\} = \{x \in X | Q(x)\}$ est équivalente à $(\forall x \in X)\,(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$.

On a par exemple $X = \{x \in X | x = x\}$ et $X = \{x \in X | x \in X\}$.

Prérequis

L'ensemble $\emptyset_X = \{x \in X | x \neq x\}$ est appelé le sous-ensemble vide de X ; il ne possède aucun élément.

Si P est une propriété quelconque, la relation $x \in \emptyset_X \Rightarrow P(x)$ est vraie pour tout x puisque la négation de $x \in \emptyset_X$ est vraie pour tout x (on rappelle que $Q \Rightarrow P$ signifie (non Q) ou P).

Par suite, si X et Y sont deux ensembles, $x \in \emptyset_X$ implique $x \in \emptyset_Y$, c'est-à-dire $\emptyset_X \subset \emptyset_Y$; pour la même raison, $\emptyset_Y \subset \emptyset_X$, et par suite $\emptyset_X = \emptyset_Y$.

Tous les ensembles vides sont donc égaux et, pour cette raison, seront tous représentés par $\emptyset$.

Prérequis

Si a est un objet quelconque, l'ensemble possédant a comme élément unique s'écrit $\{a\}$.

Si a, b sont des objets quelconques, l'ensemble possédant a et b comme éléments est appelé *paire non ordonnée* $\{a, b\}$.

Si a, b sont des objets quelconques, l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ est appelé *paire ordonnée* ou *couple* (a, b).

Prérequis

Un ensemble R est une *relation* si chaque élément de R est un couple ; cela signifie que si $z \in R$, alors il existe un x et un y tels que $z = (x, y)$.

Si R est une relation, on exprime le fait que $(x, y) \in R$ en notant xRy.

On appelle *domaine* de R, et on note $\mathrm{dom}R$, l'ensemble des x tels que xRy pour un certain y.

Prérequis

Si X et Y sont des ensembles, une *fonction* de X dans Y est une relation f, telle que $\text{dom}f = X$ et telle que pour chaque x de X, il y a un élément *unique* y de Y, tel que $(x, y) \in f$.

L'élément y est appelé la *valeur* que f prend pour l'argument x et on note $f(x) = y$.

On appelle *image* de la fonction f l'ensemble des éléments y de Y pour lesquels ils existe un x dans X tel que $f(x) = y$.

Prérequis

Rappelons qu'un *ordre partiel* sur un ensemble X est une relation réflexive, antisymétrique et transitive.

Un *ordre partiel* $\leq$ sur X est dit *total* si deux éléments quelconque de X sont toujours comparables, c'est-à-dire si pour deux éléments quelconques a, b de X, on a $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Prérequis

Si $(X, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné et si $a \in X$, l'ensemble $\{x \in X | x < a\}$ est la *section commençante* déterminée par a, qui sera notée $s(a)$.

C'est l'ensemble des *prédécesseurs stricts* de a dans X.

L'ordre strict est défini par $x < y$ si et seulement si $x \leq y$ et $y \not\leq x$.

Prérequis

Si $(X, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné, alors il peut arriver que x ait un élément a tel que $a \leq x$ pour tout x dans X.

Dans ce cas, on dira que a est le plus petit (ou premier) élément de X.

Un ensemble partiellement ordonné est dit *bien ordonné* si chacun de ses sous-ensembles non vides a un plus petit élément.

Nombres ordinaux

Pour tout ensemble X, nous désignons par X^+ le *successeur* de X, défini par :

$$X^+ = X \cup \{X\}.$$

Nous désignons par 0 l'ensemble vide $\emptyset$.

Nombres ordinaux

On définit alors :

$$\begin{aligned} 1 &= 0^+ = \{0\} \\ 2 &= 1^+ = \{0,1\} = \{0,\{0\}\} \\ 3 &= 2^+ = \{0,1,2\} = \{0,\{0\},\{0,\{0\}\}\} \end{aligned}$$

Pour poursuivre la construction à l'infini, on a besoin de l'*axiome* suivant (Halmos 1965) :

Axiome d'infinité : *il existe un ensemble contenant 0 et contenant le successeur de chacun de ses éléments*.

Un tel ensemble est dit *auto-successeur*.

Nombres ordinaux

Notons A un ensemble auto-successeur.

L'intersection de tous les ensembles auto-successeurs inclus dans A est elle-même un ensemble auto-successeur ω.

L'ensemble ω est en fait inclus dans *tout* ensemble auto-successeur : soit B un e.a.s. arbitraire, alors $A \cap B$ est un e.a.s. ; or $A \cap B \subset A$, donc $\omega \subset A \cap B$, d'où $\omega \subset B$.

La propriété de minimalité ainsi établie caractérise ω de façon unique, deux ensembles étant égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments (**axiome d'extensionnalité**).

Un *nombre naturel* est, par définition, un élement de l'ensemble auto-successeur ω.

Nombres ordinaux

Que se passe-t-il si on part de ω, qu'on forme son successeur ω^+, puis le successeur de ω^+, et ainsi de suite à l'infini ?

Autrement dit, y a-t-il "quelque chose" au delà de ω, ω^+, $(\omega^+)^+$, ... etc., en ce même sens où ω est au-delà de $0, 1, 2, \ldots$, etc. ?

Pour répondre à cette question, on aura besoin de la notion suivante :

Nombres ordinaux

Définition : Une fonction de domaine n (ensemble des prédécesseurs stricts de n) est une fonction ω-successeur si

$$f(0) = \omega$$

(pourvu que $n \neq 0$, de sorte que $0 < n$) et telle que

$$f(m^+) = (f(m))^+$$

chaque fois que $m^+ < n$, où $<$ est la relation d'appartenance $\in$.

On peut démontrer par récurrence que, pour chaque nombre naturel n, il existe une fonction ω-successeur unique f_n ayant n pour domaine (Halmos 1965).

Nombres ordinaux

Dire que "quelque chose", soit est égal à ω, soit peut-être obtenu à partir de ω par formation répétée des successeurs, veut dire que ce "quelque chose" appartient à l'image d'une certaine fonction ω-successeur.

A présent, soit $S(n, x)$ la propriété "n est un nombre naturel et x appartient à l'image de la fonction ω-successeur ayant pour domaine n".

On cherche un ensemble T tel que $x \in T$ si et seulement si $S(n, x)$ est vraie pour un certain n ; un tel ensemble est aussi "loin" de ω que ω l'est de 0.

Nombres ordinaux

Nous savons que pour chaque nombre naturel n, nous pouvons former l'ensemble $\{x|S(n,x)\}$. C'est l'image de f_n.

En d'autre termes, pour chaque nombre naturel n, il existe un ensemble $F(n)$ tel que $x \in F(n)$ si et seulement si $S(n,x)$ est vraie.

Le lien entre n et $F(n)$ ressemble beaucoup à une fonction.

Nombres ordinauxs

Il apparaît pourtant qu'il est nécessaire de postuler un axiome spécifique pour démontrer l'existence d'un ensemble F de *couples* tels que $(n, x) \in F$ si et seulement si $x \in F(n)$.

Axiome de substitution : Si $S(a, b)$ est une propriété telle que, pour chaque a dans un ensemble A, on puisse former l'ensemble $\{b|S(a, b)\}$, alors il existe une fonction F ayant pour domaine A telle que $F(a) = \{b|S(a, b)\}$ pour chaque a de A.

Dire que $\{b|S(a, b)\}$ peut être formé signifie qu'il existe un ensemble $F(a)$ tel que $b \in F(a)$ si et seulement si $S(a, b)$ est vraie.

Nombres ordinaux

L'application essentielle de l'axiome de substitution est d'étendre le procédé de dénombrement au delà des nombres naturels.

De ce point de vue, la propriété capitale d'un nombre naturel est d'être un ensemble bien ordonné tel que la section commençante déterminée par chaque élément est égale à cet élément : si m et n sont des nombres naturels, alors $m < n$ signifie $m \in n$; ceci implique que

$$\{m \in \omega | m < n\} = n.$$

Nombres ordinaux

C'est LA propriété sur laquelle est fondée le nouveau procédé de dénombrement : **un *nombre ordinal* est défini comme un ensemble bien ordonné α tel que $s(\xi) = \xi$ pour tout $\xi \in \alpha$.**

Ici, $s(\xi)$ désigne la section commençante $\{\eta \in \alpha | \eta < \xi\}$.

Nombres ordinaux

Un exemple de nombre ordinal qui n'est pas un nombre naturel est l'ensemble ω formé de tous les nombres naturels.

On peut ainsi "compter" plus loin qu'auparavant : précédemment, nous ne disposions que des éléments de ω, maintenant nous avons ω lui-même.

Nombres ordinaux

Nous avons aussi le successeur ω^+ de ω. En effet, cet ensemble est ordonné de façon évidente (rappelons que $\omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$) et cet ordre évident est un bon ordre qui satsifait les propriétés des nombres ordinaux.

Pour le voir, notons que si $\xi \in \omega^+$, alors par définition du successeur, soit $\xi \in \omega$, auquel cas nous connaisons déjà $s(\xi) = \xi$, soit $\xi = \omega$, auquel cas $s(\xi) = \omega$ par définition de l'ordre, de sorte que, de nouveau, $s(\xi) = \xi$.

Nombres ordinaux

Ce raisonnement est général : il démontre que si α est un nombre ordinal, alors α^+ en est aussi un.

Il en résulte que nous savons à présent compter jusqu'à et y compris ω et ω^+ et $(\omega^+)^+$, et ainsi de suite à l'infini.

Nombres ordinaux

Revenons à présent aux conséquences de l'axiome de substitution.

Celui-ci implique (Halmos 1965) qu'il existe une fonction unique F sur ω telle que $F(0) = \omega$ et $F(n^+) = (F(n))^+$ pour chaque nombre naturel n.

Nombres ordinaux

Considérons l'union de ω avec **l'image** de la fonction F. Cette union est habituellement notée $\omega 2$.

En empruntant la notation de l'artithmétique ordinale (qu'on ne présentera pas ici), nous écrivons $\omega + n$ pour $F(n)$.

On peut alors décrire l'ensemble $\omega 2$ comme l'ensemble formé de tous les n (avec n dans ω) et de tous les $\omega + n$ (avec n dans ω).

En définissant un bon ordre dans $\omega 2$, on peut vérifier que celui-ci est un nombre ordinal.

Nombres ordinaux

Pour cela, notons qu'un ordre partiel dans un ensemble X est déterminé d'une façon unique par ses sections commençantes (Halmos 1965).

En d'autre termes, si R et S sont des ordres dans X et si, pour chaque x de X, l'ensemble des précédecesseurs stricts par R de x est le même que l'ensemble des prédécesseurs par S de x, alors R et S sont les mêmes.

Ce résultat s'applique en particulier aux ensembles bien ordonnés. De ce cas particulier, on déduit que, s'il est possible de bien ordonner un ensemble pour en faire un nombre ordinal, alors *il n'y a qu'un seul moyen de le faire*.

Nombres ordinaux

L'ensemble seul nous dit quelle doit être la relation qui en fait un nombre ordinal.

Si cette relation satisfait aux conditions, alors l'ensemble est un nombre ordinal, sinon il ne l'est pas.

En effet, dire que $s(\xi) = \xi$ veut dire que les prédécesseurs stricts de ξ doivent être précisément les *éléments* de ξ.

La relation en question est donc simplement *la relation d'appartenance*.

Nombres ordinaux

Ainsi, si $\eta < \xi$ signifie par définition que $\eta \in \xi$ chaque fois que ξ et η sont éléments d'un ensemble α, alors le résultat est, ou n'est pas, un bon ordre de α tel que $s(\xi) = \xi$ pour chaque ξ dans α, et α est un nombre ordinal dans un cas et pas dans l'autre.

Nombres ordinaux

Concluons cette introduction aux nombres ordinaux en mentionnant les noms des premiers d'entre eux (Halmos 1965).

Aaprès $\omega 2$ vient $\omega 2+1$, puis $\omega 2+2$, puis $\omega 2+3$; puis, après tous les termes de cette suite vient $\omega 3$ (une autre application de l'axiome de substitution est nécessaire). Ensuite viennent $\omega 3+1$, $\omega 3+2$,$\omega 3+3$, ..., et après vient $\omega 4$.

De cette façon, nous obtenons successivement $\omega, \omega 2, \omega 3, \omega 4, \ldots$.

Nombres ordinaux

Une application de l'axiome de substitution donne quelque chose qui les suit tous, dans le même sens où ω suit les nombres naturels ; ce quelque chose est ω^2.

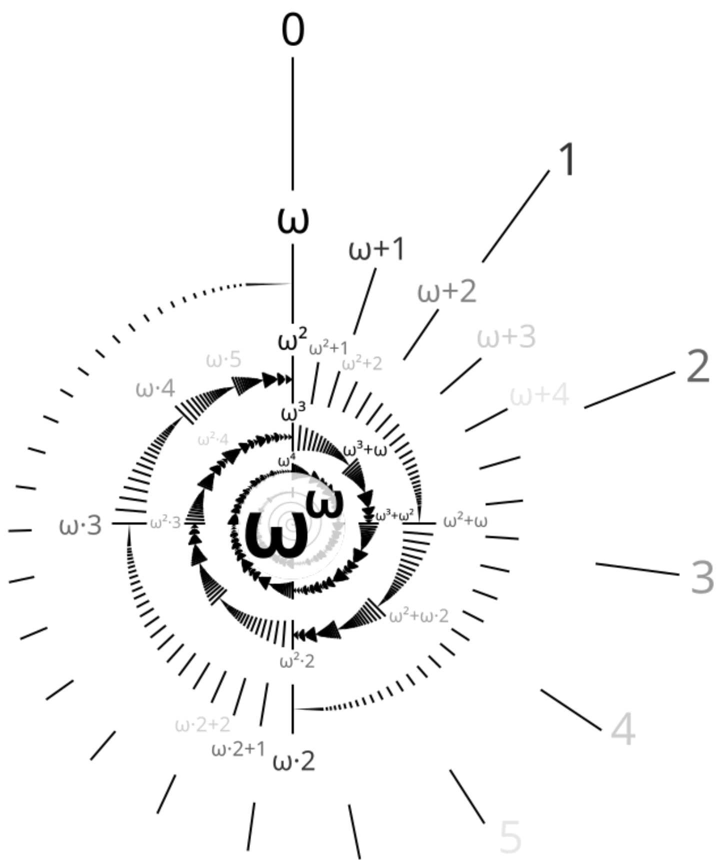
Nombres ordinaux

Après cela, tout recommence de nouveau : ω^2+1, ω^2+2,. . ., $\omega^2+\omega$, $\omega^2+\omega+1$, $\omega^2+\omega+2$, ..., $\omega^2+\omega 2$, $\omega^2+\omega 2+1$, ..., $\omega^2+\omega 3$, ..., $\omega^2+\omega 4$, $\omega^2 2$, $\omega^2 3$, ..., ω^3, ..., ω^4, ..., ω^ω, ..., $(\omega^\omega)^\omega$, ..., $((\omega^\omega)^\omega)^\omega$, ...

Après tout cela, vient ϵ_0, puis viennent ϵ_0+1, ϵ_0+2,. . ., $\epsilon_0+\omega$, ..., $\epsilon_0+\omega_2$, ..., $\epsilon_0+\omega^2$, ..., $\epsilon_0+\omega^\omega$, ..., $\epsilon_0 2$,. . ., $\epsilon_0\omega$, ..., $\epsilon_0\omega^\omega$,. . ., ϵ_0^2, ..., ...

Nombres ordinaux

Toute cette construction est usuellement représentée par le graphique suivant (*source : Wikipédia - Nombre Ordinal*) :



Intéressons-nous à présent aux nombres entiers et aux nombres rationnels, premières étapes vers les nombres réels.

Nombres rationnels et nombres entiers

La construction par Richard Dedekind des nombres réels, telle que présentée par Edmund Landau en 1929, part de l'hypothèse suivante : il existe un ensemble d'objets appelés nombres naturels possédant les propriétés – appelées axiomes des nombres naturels – suivantes :

Axiome 1 : 1 est un nombre naturel.

Cela signifie que notre ensemble n'est pas vide ; il contient un objet noté 1 (lire "un").

Nombres rationnels et nombres entiers

Axiome 2 : Pour tout nombre naturel x, il existe exactement un nombre naturel appelé le *successeur* de x, noté x'.

Ainsi, si $x = y$, alors $x' = y'$.

Le symbole $=$ est utilisé pour dénoter la relation d'identité : $x = y$ si et seulement si x et y sont le même nombre naturel. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des nombres naturels.

Si x et y ne sont pas le même nombre naturel, on note $x \neq y$.

Nombres rationnels et nombres entiers

Axiome 3 : On a toujours $x' \neq 1$.

C'est-à-dire qu'il n'existe pas de nombre naturel dont le successeur est 1.

Nombres rationnels et nombres entiers

Axiome 4 : si $x' = y'$, alors $x = y$.

C'est-à-dire qu'étant donné un nombre naturel, il existe au plus un nombre naturel dont c'est le successeur.

Nombres rationnels et nombres entiers

Axiome 5 (de récurrence) : Soit donné un ensemble E de nombres naturels vérifiant les propriétés suivantes :
I) 1 appartient à E.
II) Si x appartient à E, alors x' appartient à E.
Alors, E contient l'ensemble des nombres naturels.

Nombres rationnels et nombres entiers

Remarque : L'ensemble auto-successeur minimal ω construit dans la première partie de cet exposé par la méthode de John Von Neumann (1923), privé de 0, fournit un ensemble de nombres naturels au sens précédent.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème et Définition 1 (addition) : A chaque paire de nombres naturels x, y, on peut associer de façon unique un nombre naturel, noté $x + y$ ($+$ est lu "plus") tel que :
1) $x + 1 = x'$ pour tout x,
2) $x + y' = (x + y)'$ pour tout x et tout y.
$x + y$ est appelé la somme de x et y ou le nombre obtenu par addition de x et y.

Preuve. Landau 1929, trad. 1951, éd. 1966, p.4.

Théorème : L'addition ainsi définie est commutative et associative.

Preuve. Landau op. cit. pp. 5 et 6.

Nombres rationnels et nombres entiers

Définition 2 : Si $x = y + u$, alors $x > y$.

$>$ se lit "est supérieur à".

Définition 3 : Si $y = x + v$, alors $x < y$.

$<$ se lit "est inférieur à".

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Etant donnés x et y quelconques, l'une exactement des relations suivantes est vraie :

$$x = y, \quad x > y, \quad x < y.$$

Preuve. Landau, op. cit., p. 9.

Théorème : Si $x < y$, alors $y > x$.

Preuve. Landau, op. cit., p. 9.

Nombres rationnels et nombres entiers

Définition 4 : $x \geq y$ signifie $x > y$ ou $x = y$.

$\geq$ se lit "est supérieur ou égal à".

Définition 5 : $x \leq y$ signifie $x < y$ ou $x = y$.

$\leq$ se lit "est inférieur ou égal à".

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si $x \leq y$, alors $y \geq x$.

Preuve. Landau, op. cit., p. 10.

Théorème : La relation $\leq$ est un ordre total sur l'ensemble des nombres naturels.

Preuve. Landau, op. cit., pp. 10-13.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Tout nombre naturel x vérifie $x \geq 1$.

Preuve. Landau, op. cit. p. 12.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Tout ensemble non vide de nombre naturels admet un plus petit élément.

Preuve. Landau, op. cit. p. 13.

Ainsi, $\leq$ est un bon ordre sur l'ensemble des nombres naturels.

Autrement dit, l'ensemble des nombres naturels est bien ordonné par la relation $\leq$.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème et définition 6 (multiplication) : A chaque paire de nombres naturels x, y, on peut associer de façon unique un nombre naturel, noté $x \cdot y$ ($\cdot$ est lu "fois" et usuellement omis), tel que :
1) $x \cdot 1 = x$ pour tout x,
2) $x \cdot y' = x \cdot y + x$ pour tout x et tout y.
$x \cdot y$ est appelé le *produit* de x par y ou le nombre obtenu par *multiplication* de x par y.

Preuve. Landau, op. cit. p. 14.

Théorème : La multiplication ainsi définie est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 15-16.

Nombres rationnels et nombres entiers

Définition 7 : On appelle fraction $\frac{x_1}{x_2}$ et on lit "x_1 sur x_2" la paire ordonnée de nombres naturels (x_1, x_2).

Définition 8 :

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$$

($\sim$ lu "équivaut à") si

$$x_1 y_2 = y_1 x_2.$$

Théorème : La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 19-20.

Nombres rationnels et nombres entiers

Définition 9 :

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$$

($>$ est lu "est supérieur à") si

$$x_1 y_2 > y_1 x_2.$$

Définition 10 :

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$$

($<$ est lu "est inférieur à") si

$$x_1 y_2 < y_1 x_2.$$

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{y_1}{y_2}$ sont des fractions quelconques, alors l'une exactement des relations

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$$

est vraie.

Preuve. Landau, op. cit. p. 21.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$$

alors

$$\frac{y_1}{y_2} < \frac{x_1}{x_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 21.

Théorème : Si

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$$

alors

$$\frac{y_1}{y_2} > \frac{x_1}{x_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 21.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}, \qquad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{s_1}{s_2}, \qquad \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

alors

$$\frac{s_1}{s_2} > \frac{u_1}{u_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 22.

Ainsi, si une fraction d'une classe d'équivalence est supérieure à une fraction d'une autre classe, alors la même relation sera vraie pour toutes les paires représenttaives des deux classes.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{s_1}{s_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

alors

$$\frac{s_1}{s_2} < \frac{u_1}{u_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 22.

Ainsi, si une fraction d'une classe d'équivalence est inférieure à une fraction d'une autre classe, alors la même relation sera vraie pour toutes les paires représentatives des deux classes.

Nombres rationnels et nombres entiers

Définition 11 :

$$\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}$$

signifie

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2} \quad \text{ou} \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}.$$

($\gtrsim$ lu "supérieur ou équivalent à").

Définition 12 :

$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}$$

signifie

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2} \quad \text{ou} \quad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}.$$

($\lesssim$ lu "inférieur ou équivalent à").

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si

$$\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}, \qquad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{s_1}{s_2}, \qquad \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

alors

$$\frac{s_1}{s_2} \gtrsim \frac{u_1}{u_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 23.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si

$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}, \qquad \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{s_1}{s_2}, \qquad \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

alors

$$\frac{s_1}{s_2} \lesssim \frac{u_1}{u_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 23.

Théorème : Si

$$\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}$$

alors

$$\frac{y_1}{y_2} \lesssim \frac{x_1}{x_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 24.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si
$$\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}$$
alors
$$\frac{y_1}{y_2} \gtrsim \frac{x_1}{x_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 24.

Théorème : Les relations $<$ et $\lesssim$ sont transitives.

Preuve. Landau, op. cit. p. 24.

Théorème : La relation $\lesssim$ est une relation d'ordre total sur l'ensemble des classes d'équivalence de fractions.

Preuve. Conséquence des définitions et des résultats précédents.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Etant donné $\frac{x_1}{x_2}$, il existe une fraction

$$\frac{s_1}{s_2} > \frac{x_1}{x_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 25.

Théorème : Etant donné $\frac{x_1}{x_2}$, il existe une fraction

$$\frac{s_1}{s_2} < \frac{x_1}{x_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 25.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si $\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$, il existe une fraction $\frac{z_1}{z_2}$ telle que

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{z_1}{z_2} < \frac{y_1}{y_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 25.

Nombres rationnels et nombres entiers

Définition 13 (addition) : On entend par $\frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{y_2}$ (+ est lu "plus") la fraction

$$\frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2 y_2}.$$

Celle-ci est appelée la *somme* de $\frac{x_1}{x_2}$ et $\frac{y_1}{y_2}$, ou la fraction obtenue par *addition* à $\frac{x_1}{x_2}$ de $\frac{y_1}{y_2}$.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}, \qquad \frac{s_1}{s_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

alors

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{s_1}{s_2} \sim \frac{y_1}{y_2} + \frac{u_1}{u_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 26.

Ainsi, la classe d'équivalence d'une somme ne dépend que des classes des termes de la somme.

Théorème : L'addition ainsi définie est commutative et associative.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 26-27.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2},$$

alors

$$\frac{y_1}{y_2} + \frac{u_1}{u_2} \sim \frac{x_1}{x_2}$$

admet une solution $\frac{u_1}{u_2}$. Si $\frac{v_1}{v_2}$ et $\frac{w_1}{w_2}$ sont des solutions, alors

$$\frac{v_1}{v_2} \sim \frac{w_1}{w_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 29.

Définition 14 (soustraction) : Toute solution spécifique $\frac{u_1}{u_2}$ du théorème précédent est notée $\frac{x_1}{x_2}-\frac{y_1}{y_2}$ (- est lu "moins") et appelée la *différence* $\frac{x_1}{x_2}$ moins $\frac{y_1}{y_2}$ ou la fraction obtenue par *soustraction* de la fraction $\frac{y_1}{y_2}$ de la fraction $\frac{x_1}{x_2}$.

Nombres rationnels et nombres entiers

Définition 15 (multiplication) : On entend par $\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{y_1}{y_2}$ ($\cdot$ est lu "fois" mais usuellement omis) la fraction $\frac{x_1 y_1}{x_2 y_2}$.

Elle est appelée le *produit* de $\frac{x_1}{x_2}$ et $\frac{y_1}{y_2}$ ou la fraction obtenue par *multiplication* de $\frac{x_1}{x_2}$ par $\frac{y_1}{y_2}$.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}, \qquad \frac{z_1}{z_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

alors

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 31.

Ainsi, la classe d'équivalence d'un produit ne dépend que des classes d'équivalence des "facteurs".

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : La multiplication des fractions est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition des fractions.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 31-32.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : L'équivalence

$$\frac{y_1}{y_2}\frac{u_1}{u_2} \sim \frac{x_1}{x_2}$$

où $\frac{x_1}{x_2}$ et $\frac{y_1}{y_2}$ sont donnés, admet une solution $\frac{u_1}{u_2}$. Si $\frac{v_1}{v_2}$ et $\frac{w_1}{w_2}$ sont des solutions, alors

$$\frac{v_1}{v_2} \sim \frac{w_1}{w_2}.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 34.

Nombres rationnels et nombres entiers

Définition 16 : On entend par **nombre rationnel** l'ensemble de toutes les fractions qui sont équivalentes à une fraction données.

Définition 17 : $x = y$ ($=$ est lu "égal") si les deux ensembles ont les mêmes fractions pour éléments. Sinon $x \neq y$ ($\neq$ est lu "différent de").

Théorème : La relation $=$ est une relation d'équivalence.

Preuve. Landau, op. cit. p. 35.

Nombres rationnels et nombres entiers

Définition 18 : $x > y$ ($>$ est lu "est supérieur à") si pour une fraction $\frac{x_1}{x_2}$ de l'ensemble x et pour une fraction $\frac{y_1}{y_2}$ de l'ensemble y (et donc pour toute paire de telles fractions), on a

$$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}.$$

Définition 19 : $x < y$ ($>$ est lu "est inférieur à") si pour une fraction $\frac{x_1}{x_2}$ de l'ensemble x et pour une fraction $\frac{y_1}{y_2}$ de l'ensemble y (et donc pour toute paire de telles fractions), on a

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}.$$

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Pour tous nombres rationnels x, y, l'une exactement des relations suivantes

$$x = y, \quad x > y, \quad x < y.$$

est vraie.

Preuve. Landau, op. cit. p. 36.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si $x > y$, alors $y < x$.

Preuve. Landau, op. cit. p. 36.

Théorème : Si $x < y$, alors $y > x$.

Preuve. Landau, op. cit. p. 36.

Nombres rationnels et nombres entiers

Définition 20 : $x \geq y$ signifie

$$x > y \quad \text{ou} \quad x = y.$$

($\geq$ est lu "supérieur ou égal à").

Définition 21 : $x \leq y$ signifie

$$x < y \quad \text{ou} \quad x = y.$$

($\geq$ est lu "inférieur ou égal à").

Théorème : Si $x \geq y$, alors $y \leq x$.

Preuve. Landau, op. cit. p. 36.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si $x \leq y$, alors $y \geq x$.

Preuve. Landau, op. cit. p. 36.

Théorème : Les relations $<$ et $\leq$ sont transitives.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 36-37.

Théorème : La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur la classe des nombres rationnels.

Preuve. Immédiat d'après ce qui précède.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Etant donné un nombre rationnel x, il existe un nombre rationnel $z > x$.

Preuve. Landau, op. cit. p. 37.

Théorème : Etant donné un nombre rationnel x, il existe un nombre rationnel $z < x$.

Preuve. Landau, op. cit. p. 37.

Théorème : Si $x < y$ où x et y sont des nombres rationnels, il existe un nombre rationnel z tel que

$$x < z < y.$$

Preuve. Landau, op. cit. p. 37.

Nombres rationnels et nombres entiers

Définition 22 (addition) : On entend par $x + y$ (+ est lu "plus") la classe d'équivalence qui contient une somme (et donc toute telle somme) d'une fraction issue de x et d'une fraction issue de y.
Ce nombre rationnel est appelé la *somme* de x et y ou le nombre rationnel obtenu par *addition* de y à x.

Théorème : L'addition des nombres rationnels est commutative et associative.

Preuve. Landau, op. cit. p. 37.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si $x > y$, alors $y+u = x$ admet exactement une solution u.

Définition 23 (soustraction) : La solution u du théorème précédent est notée $x - y$ (- est lu "moins") et est appelé la *différence* x moins y ou le nombre rationnel obtenu par *soustraction* du nombre rationnel y du nombre rationnel x.

Nombres rationnels et nombres entiers

Définition 24 (multiplication) : On entend par $x \cdot y$ ($\cdot$ est lu "fois" et usuellement omis) la classe d'équivalence qui contient un produit (et donc tout produit) d'une fraction issue de x avec une fraction issue de y.
Ce nombre rationnel est appelé le *produit* de x par y ou le nombre rationnel obtenu par *multiplication* de x par y.

Théorème : La multiplication de nombres rationnels est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition.

Preuve. Landau, op. cit. pp. 38-39.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Si

$$\frac{x}{1} > \frac{y}{1}, \text{ ou } \frac{x}{1} \sim \frac{y}{1}, \text{ ou } \frac{x}{1} < \frac{y}{1},$$

alors

$$x > y, \text{ ou } x = y \text{ ou } x < y,$$

respectivement, et réciproquement.

Preuve. Landau, op. cit. p. 40.

Nombres rationnels et nombres entiers

Définition 25 : Un nombre rationnel est appelé **nombre entier** si l'ensemble des fractions qu'il représente contient une fraction de la forme $\frac{x}{1}$.

Il découle du théorème précédent que le nombre naturel x est déterminé de façon unique. Réciproquement, à tout nombre naturel x correspond exactement un entier.

Théorème :

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} \sim \frac{x+y}{1}$$

$$\frac{x}{1}\frac{y}{1} \sim \frac{xy}{1}.$$

Ainsi, la somme et le produit de deux entiers sont elles-mêmes des entiers.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : Les entiers vérifient les cinq axiomes des nombres naturels, pourvu que le rôle de 1 soit dévolu à la classe d'équivalence de $\frac{1}{1}$ et que le rôle de successeur de la classe de $\frac{x}{1}$ soit dévolu à la classe de $\frac{x'}{1}$.

Preuve. Landau, op. cit. p. 40.

Nombres rationnels et nombres entiers

Comme $=$, $>$, $<$, somme et produit correspondent tous aux concepts correspondants établis pour les nombres naturels (en vertu des deux théorèmes précédents), les entiers ont toutes les propriétés associées aux nombres naturels.

On s'affranchit donc des nombres naturels et on les remplace par les entiers correspondants en introduisant la définition suivante :

Définition 26 : Le symbole x représente l'entier correspondant à la classe d'équivalence de $\frac{x}{1}$.

Nombres rationnels et nombres entiers

Théorème : L'équation $yu = x$, dans laquelle x et y sont des nombres rationnels donnés, admet exactement une solution u.

Preuve. Landau, op. cit. p. 39.

Définition 27 (division) : La solution u du théorème précédent est appelée le *quotient* de x par y ou le nombre rationnel obtenu par *division* de x par y. Elle est notée $\frac{x}{y}$ (- est lu "sur").

Nombres rationnels et nombres entiers

En vertu de la définition 26, nous avons le résultat suivant :

Théorème : Si z est le nombre rationnel correspondant à la fraction $\frac{x}{y}$, alors

$$yz = x.$$

Preuve. Landau op. cit. p.42.

<u>Nombres rationnels et nombres entiers</u>

Théorème : Soit x et y des nombres rationnels donnés. Alors, il existe un entier z tel que

$$zx > y.$$

Preuve. Landau op. cit. p. 42.

L'ordre $\leq$ est donc *archimédien*.

Présentation de la deuxième partie

Dans le deuxième exposé, nous introduis la notion de coupure et appellerons les coupures "nombres positifs" et ce que nous avons appelé "nombres rationnels" et "nombres entiers" seront appelés "nombres rationnels positifs" et "entiers positifs", respectivement.

Nous créerons un nouveau nombre 0 (lu "zéro"), distinct des nombres positifs.

Nous créerons également des nombres distincts des nombres positifs et distincts de zéro et qu'on appellera "nombres négatifs", de façon à ce qu'à chaque nombre positif ξ soit associé un nombre négatif $-\xi$ (- est lu "moins").

Présentation de la deuxième partie

La classe regroupant les nombres positifs, zéro et les nombres négatifs sera appelée classe des **nombres réels**.

Nous construirons ensuite la classe des **nombres surréels** *de John Conway (1976), qui contiendra en particulier les nombres réels et les nombres ordinaux, avec une approche complètement différente de ce qui a été vu jusqu'à présent.*

Bibliographie

Dieudonné, J. (1969) Eléments d'Analyse 1, Gauthier-Villars.

Halmos, P. R. (1997) Introduction à la Théorie des Ensembles, Jacques Gabay.

Landau, E. (1966) Foundations of Analysis, Chelsea Publishing Company.