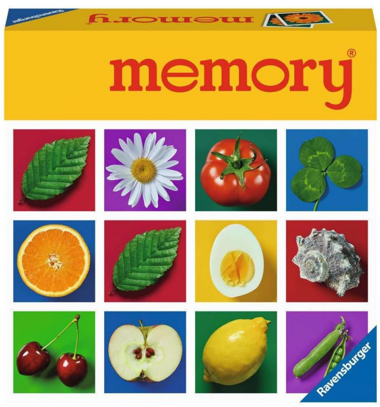
Revue de résultats mathématiques sur le jeu de Memory en solitaire

Salim Lardjane
LMBA
UMR CNRS 6205



Introduction

Le jeu de Memory, également appelé "jeu des paires", "Concentration", "Hüsker Dü", ’Shinkei-suijaku", "Memo" ou "Pexeso", a suscité l’intérêt des mathématiciens depuis les années 50 du vingtième siècle.

Au début d’une partie, il y a $2N$ cartes faces cachées sur un plateau, consistant en $N \geq 1$ paires positionnées aléatoirement, chaque paire de cartes portant le même symbole, les N symboles étant différents. Le but des joueurs est de collecter des paires de cartes portant des symboles identiques.

Introduction

A son tour, un joueur retourne deux cartes face visible ; son adversaire peut donc également les voir.

Si les symboles sur les cartes retournées sont identiques, le joueur les collecte et il dispose d'un nouveau tour.

Si les symboles sur les deux cartes sont différents, les cartes sont retournées face cachée et la main passe à son adversaire.

Le gagnant est celui ou celle qui a collecté le plus de paires de cartes portant des symboles identiques.

Introduction

Au delà de son intérêt ludique - il est recommandé aux enfants à partir de 3 ans -, ce jeu peut être utilisé pour améliorer les capacités de mémorisation des individus et, plus récemment, pour quantifier celles-ci dans sa version jouée en solitaire sur ordinateur.

Le déroulement du jeu en solitaire est identique au jeu à deux joueurs, à ceci près que la main reste à l'unique joueur et que l'objectif est de collecter toutes les paires de cartes appariées en un minimum de temps (autrement dit, en retournant un minimum de cartes).

Introduction

Du point de vue mathématique, il est usuel de supposer que le ou les joueurs ont une mémoire parfaite, ce qui revient à supposer qu'une carte, une fois retournée, reste face visible sur le plateau.

A son tour, chaque joueur a donc le choix entre trois options : retourner deux nouvelles cartes, ne retourner qu'une nouvelle carte ou ne retourner aucun nouvelle carte.

Introduction

Dans le jeu à deux joueurs, le problème posé est alors de déterminer une stratégie optimale pour les joueurs, au sens où celle-ci maximise l'espérance de la différence du nombre de paires collectée par un joueur et son adversaire.

Une telle stratégie optimale, non triviale, a été obtenue par Zwick et Paterson dans un article publié en 1993 et a fait l'objet de publications dans Scientific American en 1991 et The Mathematical Intelligencer en 1993. De premiers résultats sur le sujet avaient été obtenus dans le cadre d'un projet d'étude en 1983 par un étudiant hollandais.

Introduction

Dans cet exposé, nous allons nous intéresser uniquement à la version du jeu jouée en solitaire. Les questions posées sont alors différentes. Les résultat présentés sont issus de deux articles : [Foerster & Wattenhoffer 2013], [Velleman & Warrington 2013]. Ceux-ci constituent les références standard sur le sujet.

Hypothèses

1. La position précise des cartes sur le plateau n'affecte pas le déroulement d'une partie de Memory. Seul intervient l'ordre dans lequel elles sont retournées.

On peut donc supposer qu'elle sont positionnées dans une seule rangée.

Hypothèses

2. Lorsque le joueur retourne une carte, il n'y a pas de raison de retourner une carte en particulier plutôt qu'une autre, le jeu de carte étant battu (mélangé aléatoirement) avant que les cartes soient disposées sur le plateau.

On peut donc supposer que les cartes sont simplement retournées successivement de la gauche vers la droite.

Avec cette convention, le déroulement d'une partie dépend uniquement de l'ordre des cartes alignées sur le plateau.

Hypothèses

3. Les symboles portés sur les cartes n'interviennent pas dans le jeu hormi le fait qu'ils soient deux à deux appariés.

On peut donc supposer que les symboles sont les nombres entiers $1, 2, \ldots, N$, où $2N$ est le nombre de cartes du jeu, chaque symbole apparaissant deux fois exactement dans celui-ci.

Stratégie optimale

Lors d’un tour, le joueur retourne deux cartes.

Il peut à chaque fois choisir de retourner une carte déjà vue ou une nouvelle carte.

Définition. On appelle *stratégie* du joueur la suite de ses choix au cours d’une partie. On appelle *stratégie optimale* une stratégie qui minimise le nombre de tours requis pour terminer la partie.

On va a présent exhiber une stratégie optimale.

Stratégie optimale

Théorème (FW13). La stratégie suivante est optimale.

A chaque tour, procéder de la façon suivante :
T1. Si une paire de carte faces cachées appariées est connue, les retourner et collecter la paire.
T2. Sinon retourner une nouvelle carte :
T2a. Si la carte appariée est connue face cachée, retourner celle-ci et collecter la paire ;
T2b. Sinon retourner une deuxième nouvelle carte ;
T2c. Si les deux nouvelles cartes retournées sont appariées, collecter la paire ;
T2d. Sinon, retourner les cartes faces cachées.

Preuve. (T2c) et (T2d) sont des règles du jeu, incluses dans la stratégie par souci d'exhaustivité.

Lorsqu'une paire de cartes faces cachées appariées est connue avant un tour, il importe peu qu'elle soit collectée lors de ce tour ou plus tard : la collecte prendra un tour dans tous les cas. On peut donc la collecter lors du tour sans augmenter la longueur de la partie (T1).

Si une telle paire n'est pas connue avant le tour, il n'est pas rationnel de retourner deux cartes faces cachées connues non appariées puisque cela augmente le nombre de tours total de 1 sans révéler de nouvelles informations, c'est-à-dire sans faire avancer le jeu.

Stratégie optimale

Le joueur doit donc (à partir du premier tour après le premier tour non chanceux) :

a. soit retourner d'abord une carte face cachée connue puis une carte face cachée inconnue ;

b. soit retourner d'abord une carte face cachée inconnue puis une carte face cachée connue ;

c. soit retourner deux nouvelles cartes faces cachées inconnues.

Stratégie optimale

Pour que a. révèle une paire, il faut que la nouvelle carte retournée au deuxième tirage soit appariée à la carte connue retournée au premier tirage.

Pour que b. révèle une paire, il faut q'une des cartes faces cachées connues soit appariée à la nouvelle carte retournée au premier tirage.

Pour que c. révèle une paire, on doit être dans le cas d'un tour chanceux.

Stratégie optimale

A la fin du tour, le résultat de a. et b. est le même : on a tiré au hasard une carte inconnue et une carte connue. Cela prend donc autant de tours de collecter les paires dans les cas a. et b.

Cependant, après le premier tirage, le joueur peut renoncer à b. et choisir de retourner une nouvelle carte si la carte retournée n'est appariée à aucune carte connue, ce qui n'est pas le cas pour a. On est alors dans le cas c.

Stratégie optimale

Lorsque la carte inconnue tirée au premier tirage *ne possède pas de carte appariée connue* face cachée, tirer une carte déjà connue ne révèle pas d'information nouvelle, contrairement au fait de tirer une nouvelle carte inconnue.

Dans ce cas, tirer une carte connue augmente de 1 le nombre de tirages requis pour collecter la paire correspndante par rapport au fait de tirer une carte inconnue.

Stratégie optimale

Or, à la fin de la partie, le nombre de tours est égal à la somme du nombre de tirages requis pour collecter les paires divisée par 2 puisqu'à chaque tour on retourne deux cartes (2 tirages).

Le joueur rationnel doit donc toujours tirer une nouvelle carte inconnue lorsque la carte tirée au premier tirage ne possède pas de carte appariée connue (T2b).

Stratégie optimale

Il reste à montrer que le joueur doit collecter *immédiatement* la paire si la carte tirée au premier tirage possède une carte appariée connue (T2a).

Trois cas sont possibles pour chaque paire de cartes appariées :

1. Les deux cartes sont révélée lors d'un seul tour. Alors, chaque carte de la paire est retournée une seule fois (2 tirages au total)

2. Les deux cartes sont faces cachées connues et retournées lors du tour. Alors, chaque carte est retournée deux fois (4 tirages au total pour la paire)

3. Une carte est face cachée connue et l'autre est retournée lors du premier tirage du tour. Alors, retourner la carte appariée déjà connue lors du tour a pour effet qu'une carte est retournée 2 fois et l'autre 1 fois (3 tirages au total pour la paire)

Stratégie optimale

Lorsque la première carte tirée possède une carte appariée face cachée connue, est-il plus efficace de retourner une nouvelle carte que de retourner la carte qui fait la paire ?

Stratégie optimale

Clairement, non.

Lorsque le joueur retourne une nouvelle carte, collecter les *deux* paires coûtera 8 tirages si la deuxième carte tirée n'a pas de carte appariée face cachée connue, et coûtera 7 tirages si la deuxième carte tirée a une carte face cachée connue.

Lorsque le joueur retourne la carte connue qui fait la paire, collecter les deux paires coûtera au maximum 7 tirages : en effet la première est collectée en 3 tirages et la deuxième est collectée au maximum en 4 tirages (cas où la deuxième carte tirée n'a pas de carte appariée face cachée connue).

Stratégie optimale

Ainsi, le joueur rationnel doit retourner d'abord une carte face cachée inconnue (T2) puis une carte face cachée connue si elle est appariée à la première carte tirée (T2a), sinon il doit tirer une nouvelle carte au deuxième tirage (T2b).

Ceci achève la démonstration du Théorème 1.

Exemple

Supposons que $N = 6$ et que les cartes soient présentée de la façon suivante :

1 2 1 6 2 3 3 5 4 4 5 6

Une partie se déroule de la façon suivante selon la stratégie optimale :

1. Le joueur retourne deux cartes, qui sont 1 et 2. Comme elles ne sont pas appariées, elles sont retournées face cachée.

On marque par x les cartes connues face cachée et on note X les cartes collectées. L'état du jeu est alors le suivant :

Exemple

1x 2x 1 6 2 3 3 5 4 4 5 6

2. Le joueur retourne une nouvelle carte, qui est un 1. Se souvenant que la première carte était aussi un 1, le joueur retourne la première carte pour avoir la paire puis collecte celle-ci, c’est-à-dire qu’il l’enlève du jeu.

Exemple

X 2x X 6 2 3 3 5 4 4 5 6

3. Le joueur retourne les deux cartes suivantes, qui sont un 6 et un 2. Elles ne sont pas appariées et sont donc retournées face cachée.

Exemple

X 2x X 6x 2x 3 3 5 4 4 5 6

4. Le joueur connaît à présent la position des deux 2. Il les retourne donc et collecte la paire.

Exemple

X X X 6x X 3 3 5 4 4 5 6

5. Le joueur retourne les deux cartes suivantes, qui sont deux 3. Elles sont appariées. Il les collecte donc. Comme aucune des deux cartes n'avait été déjà retournée, c'est un exemple de *tour chanceux*.

Exemple

X X X 6x X X X 5 4 4 5 6

6. Le joueur retourne les deux cartes suivantes : un 5 et un 4. Comme elles ne sont pas appariées, elles sont retournées face cachée.

Exemple

X X X 6x X X X 5x 4x 4 5 6

7. Le joueur retourne la carte suivante, qui est le deuxième 4. Se souvenant que la carte précédente était aussi un 4, il la retourne et collecte la paire de 4.

Exemple

X X X 6x X X X 5x X X 5 6

8. Le joueur retourne le deuxième 5, retourne de nouveau le premier 5 et collecte la paire.

Exemple

X X X 6x X X X X X X X 6

9. Le joueur retourne le deuxième 6, retourne de nouveau le premier 6 et collecte la paire.

La partie est alors terminée :

X X X X X X X X X X X X

Exemple

Dans cet exemple nous avons appelé un *tour* le fait de retourner successivement deux cartes.

Un tour est suivi soit d'une collecte soit du retournement des deux cartes faces cachées.

On a de plus supposé que le joueur avait une mémoire parfaite*, c'est-à-dire qu'il se souvenait des cartes déjà retournées et de leur positions.*

Etat du jeu

L'exemple précédent nous incite à identifier à chaque tour l'état du jeu par un triplet :

$$(n, k, p)$$

n : désigne le nombre de paires restant sur le plateau

k : désigne le nombre de cartes déjà retournées non collectées

p : désigne le nombre de paires connues mais non collectées

Etat du jeu

Le déroulement de la partie donnée en exemple peut alors s'écrire :

0. (6,0,0) : 1 2 1 6 2 3 3 5 4 4 5 6
1. (6,2,0) : 1x 2x 1 6 2 3 3 5 4 4 5 6
2. (5,1,0) : X 2x X 6 2 3 3 5 4 4 5 6
3. (5,3,1) : X 2x X 6x 2x 3 3 5 4 4 5 6
4. (4,1,0) : X X X 6x X 3 3 5 4 4 5 6
5. (3,1,0) : X X X 6x X X X 5 4 4 5 6
6. (3,3,0) : X X X 6x X X X 5x 4x 4 5 6
7. (2,1,0) : X X X 6x X X X 5x X X 5 6
8. (1,1,0) : X X X 6x X X X X X X X 6
9. (0,0,0) : X X X X X X X X X X X X

Parties les plus courtes

Si les cartes sont dans l'ordre :

$$1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ \ldots\ N\ N$$

alors, la partie consiste en N tours chanceux.

Les états successifs du jeu sont : (N,0,0), ($N-1$,0,0),. . ., (0,0,0).

Théorème 1. La durée minimale d'une partie est de N tours (FW13). Une partie de durée minimale est nécessairement une suite de tours chanceux (L24).

Parties les plus courtes

Preuve. Les paires étant collectées une à la fois, le jeu doit nécessairement passer par des états (n, k, p) où n prend successivement les valeurs

$$N, N-1, \dots, 1, 0.$$

Une partie passe donc par $N+1$ états au minimum, c'est-à-dire qu'elle dure N tours au minimum. C'est le cas des parties consistant en une suite de tours chanceux.

Si au moins un tour n'est pas chanceux, alors la collecte d'au moins une paire prend deux tours (au permier tour, l'une des deux cartes est révélée puis retournée face cachée ; au deuxième tour, elle est révélée et collectée). Comme il y a N collectes, la longueur de la partie est alors nécessairement strictement supérieure à N tours.

Parties les plus longues

Théorème 3. La durée maximale d'une partie pour la stratégie optimale est de $2N - 1$ tours.

Preuve. Supposons que les cartes soient dans l'ordre :

$$(1, 2)(3, 1)(4, 2) \dots (k, k - 2) \dots (N, N - 2)(N, N - 1)$$

où les virgules et parenthèses facilitent la lecture.

Du couple (1,2) au couple $(N, N - 2)$, la première carte retournée et toujours une carte inconnue qui n'a pas de carte appariée connue face cachée. La stratégie optimale recommande dans ce cas de retourner une nouvelle carte.

Du couple (3,1) au au couple $(N, N-1)$, la carte ainsi révélée a une carte appararariée connue face cachée.

Parties les plus longues

Ainsi, suivant la stratégie optimale, du couple (3, 1) au couple $(N, N-2)$, un tour est utilisé pour révéler les deux cartes du couple. et la paire alors connue est collectée au tour suivant.

Après le premier tour, utilisé pour révéler le couple (1,2), aucune paire n'est collectée.

Pour le couple $(N, N-1)$, un tour est utilisé pour collecter la paire (N, N) puis un tour pour collecter la paire $(N-1, N-1)$.

Ainsi, au total, on a besoin de $2(N-1)+1 = 2N-1$ tours pour collecter l'ensemble des paires avec la stratégie optimale.

Parties les plus longues

On a ainsi démontré que la durée maximale d'une partie pour la stratégie optimale était supérieure ou égale à $2N - 1$ tours. Nous allons conclure à l'aide du lemme suivant.

Parties les plus longues

Lemme 1. La durée d'une partie pour la stratégie optimale est inférieure ou égale à $2N - 1$ tours.

Preuve. Lorsque le joueur aura révélé les $N - 1$ premiers couples (ce qui requiert $(2(N - 1)$ tirages), il aura connu l'emplacement d'au moins $N - 2$ paires. En effet, il reste alors seulement 2 cartes non retournées, qui peuvent au plus correspondre à deux paires.

Avec la stratégie optimale, la collecte de ces paires requiert au maximum $2(N - 2)$ tirages supplémentaires, ce qui donne au total $2(N - 1) + 2(N - 2) = 4N - 6$ tirages au maximum pour collecter les $(N - 2)$ premières paires.

Parties les plus longues

Le joueur retournera alors l'avant-dernière carte.

Si la carte appariée est connue face cachée, il la retourne et collecte la paire, ce qui coûte donc 2 tirages de plus. Il retourne alors la dernière carte, dont la carte appariée est nécessairement connue face cachée et la collecte de la dernière paire coûte également deux tirages de plus. Ainsi, la collecte des deux dernières paires coûte, dans ce cas, 4 tirages supplémentaires.

Parties les plus longues

Si la carte appariée n'est pas connue, c'est nécessairement la dernière carte et on est dans le cas d'un tour chanceux : la collecte de la dernière paire coûte 2 tirages. La collecte de l'avant-dernière paire requiert 2 tirages supplémentaires ; ainsi la collecte des deux dernières paires coûte, dans ce cas, 4 tirages supplémentaires également.

Avec la stratégie optimale, on a donc au maximum $4N - 6 + 4 = 4N - 2$ tirages pour terminer la partie, ce qui correspond à $2N - 1$ tours.

Ceci achève la démonstration du Lemme 1 et donc du Théorème 3.

Formalisation

Jusqu’à présent, nous avons spécifié à chaque fois, l’ordre dans lequel les cartes sont distribuées.

En fait, le déroulement d’une partie, dépend uniquement des *positions relatives* des paires dans cet ordre.

Ces positions relatives peuvent être visualisées en ayant recours à la notion de *réseau d’interconnections* [FS09].

Formalisation

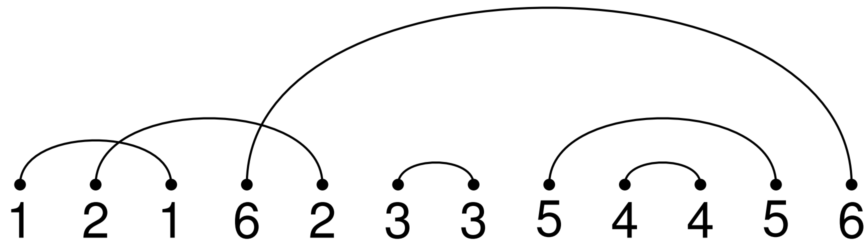
Un *réseau d'interconnections* consiste en la donnée de $2N$ points et de N arcs reliant des paires distinctes de points distincts.

De façon équivalente, un tel réseau représente une involution sans point fixe.

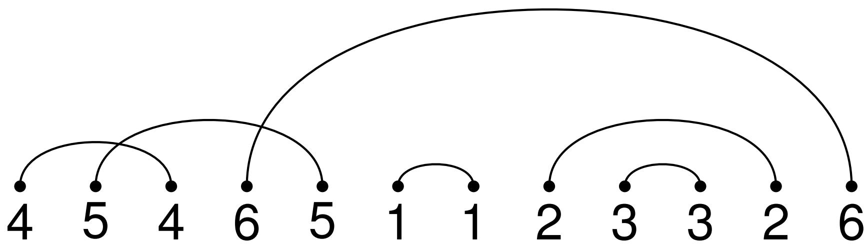
Les deux figures suivantes représentent deux distributions de cartes pour $N = 6$ avec le réseau d'interconnections correspondant, où chaque paire est reliée par un arc.

Formalisation

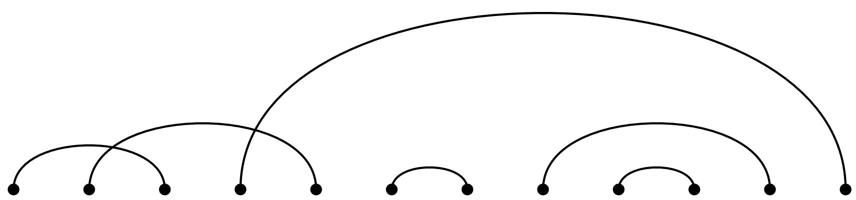
Distribution 1 :



Distribution 2 :



Dans les deux cas, le réseau d'interconnections est le même :



Formalisation

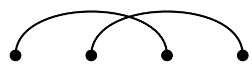
La Distribution 1 conduit essentiellement au même déroulement de la partie que la Distribution 2.

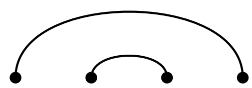
Plus généralement, il y a une application des distributions de longueur $2N$ vers les réseaux d'interconnection de longueur $2N$ qui associe à $N!$ distributions un même réseau d'interconnections.

Formalisation

Dans le cas $N = 2$, cette application est représentée ci-dessous :

$\{1\,1\,2\,2, 2\,2\,1\,1\} \longrightarrow$ 

$\{1\,2\,1\,2, 2\,1\,2\,1\} \longrightarrow$ 

$\{2\,1\,1\,2, 1\,2\,2\,1\} \longrightarrow$ 

Formalisation

Nous pouvons à présent désigner une distribution particulière pour représenter chaque partie, c'est-à-dire pour représenter chaque réseau d'interconnections.

On dira qu'une distribution de cartes est *standard* si, au cours de la partie, les paires sont collectées dans l'ordre $(1,1),(2,2),\ldots(N,N)$ avec la stratégie optimale.

Autrement dit, une distribution de cartes est standard si la deuxième occurrence de i apparaît à gauche de la deuxième occurrence de $i+1$ pour tout $i = 1,\ldots,N-1$.

Formalisation

Lemme (L24). Chaque réseau d'interconnections peut être représenté par une distribution de cartes standard et une seule.

Preuve. Il suffit de numéroter les arcs du réseau d'interconnections successivement (de droite à gauche) de (N, N) à $(1, 1)$. La distribution de cartes ainsi obtenue est standard.

Réciproquement, si la distribution de cartes est standard, les arcs sont numérotés successivement, de droite à gauche, de (N, N) à (1,1), puisque les paires sont collectées (de gauche à droite) dans l'ordre (1,1) à (N, N).

Formalisation

A présent, notons $\mathcal{M}_N$ l'ensemble des permutations du multi-ensemble $\{1, 1, 2, 2, \ldots, N, N\}$, c'est-à-dire l'ensemble des distributions de cartes possibles.

Chaque distribution de cartes correspond à un élément standard de $\mathcal{M}_N$.

On notera ces éléments *en ligne* : par exemple, soit $\sigma \in \mathcal{M}_N$ tel que $\sigma(1) = \sigma(4) = 2$ et $\sigma(2) = \sigma(3) = 1$; cet élément, σ, représente la distribution 2 1 1 2.

On peut alors démontrer le résultat suivant.

Formalisation

Lemme (VW13). Le nombre de distributions de cartes standard d'un jeu de Memory à $2N$ cartes est :

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2N-1) = \frac{(2N)!}{2^N N!}.$$

Preuve. Pour $N = 1$, la formule est trivialement vraie : le nombre de distributions de cartes standard pour le jeu de Memory à deux cartes est 1.

Supposons que $N \geq 2$ et que la propriété soit vraie à l'ordre $N-1$. Une distribution standard de $2N$ cartes est obtenue en ajoutant deux copies de N à une distribution standard de $2(N-1)$ cartes.

Pour que la distribution ainsi obtenue soit standard, il faut que la deuxième occurrence de N soit en dernière position.

Il y a donc $2(N-1)+1 = 2N-1$ positions possibles pour la première occurrence de N.

On en déduit le résultat par récurrence.

Position espérée de la première paire collectée

On appellera position d'une paire collectée la position de la **deuxième carte** *de la paire.*

Soit $\sigma \in \mathcal{M}_N$ une distribution de cartes standard.

Notons $f(\sigma)$ le plus petit indice j tel que $\sigma(j) = \sigma(i)$ pour un $i < j$.

En d'autres termes, $f(\sigma)$ est la *position de la première carte qui est appariée avec une carte précédemment tirée*.

Comme on suppose la distribution de cartes standard, cette première carte est nécessairement un 1.

Position espérée de la première paire collectée

Notons $a(N, j)$ le nombre de permutations standard $\sigma \in \mathcal{M}_N$ telles que $f(\sigma) = j$.

Remarquons que $2 \leq f(\sigma) \leq N + 1$, donc $a(N, j) = 0$ si $j = 1$ ou $j > N + 1$.

Alors, pour une distribution de carte standard tirée au hasard uniformément dans $\mathcal{M}_N$, la probabilité que $f(\sigma) = j$ vaut :

$$\frac{a(N, j)}{(2N)!/(2^N N!)}.$$

Position espérée de la première paire collectée

Par conséquent, l'espérance de $f(\sigma)$ est donnée par :

$$\sum_{j=2}^{N+1} j \cdot \frac{a(N, j)}{(2N)!/(2^N N!)} = \frac{\sum_{j=2}^{N+1} j \cdot a(N, j)}{(2N)!/(2^N N!)}.$$

Il s'avère que le numérateur de la fraction précédente admet une expression simple :

Lemme (VW13). Pour tout entier strictement positif N, on a :

$$\sum_{j=2}^{N+1} j \cdot a(N, j) = 2^N \cdot N!$$

Position espérée de la première paire collectée

Preuve. On raisonne par récurrence sur N.

Le résultat est clairement vrai lorsque $N = 1$: dans ce cas, $a(1, 2) = 2$.

Une permutation standard $\sigma \in \mathcal{M}_N$ telle que $f(\sigma) = j$ peut être construite à partir d'une permutation standard de $\mathcal{M}_{N-1}$ de deux façons.

Position espérée de la première paire collectée

Première façon : partir d'une permutation standard $\sigma' \in \mathcal{M}_{N-1}$ telle que $f(\sigma') = j$ puis insérer un N après la position j, puis le second en fin de ligne.

Le nombre de permutations standard pouvant être construites de cette façon est $(2N-1-j) \cdot a(N-1, j)$.

Position espérée de la première paire collectée

La deuxième façon est de partir d'une permutation standard $\sigma' \in \mathcal{M}_{N-1}$ telle que $f(\sigma') = j - 1$ puis insérer un N avant la position $j - 1$, puis le second en fin de ligne.

Le nombre de permutations standard pouvant être construites de cette façon est $(j-1) \cdot a(N-1, j-1)$.

Position espérée de la première paire collectée

On a donc la formule de récurrence :

$$a(N, j) = (2N-1-j)\cdot a(N-1, j)+(j-1)\cdot a(N-1, j-1).$$

Un calcul direct (changement d'indice) montre alors que :

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{N+1} j \cdot a(N, j) &= 2^N \cdot \sum_{j=1}^{N} j \cdot a(N-1, j) \\ &= 2N \cdot 2^{N-1}(N-1)! \quad \text{(par H. de récurrence)} \\ &= 2^N N!\end{aligned}$$

On en déduit le résultat suivant.

Position espérée de la première paire collectée

Théorème (VW13). La position espérée de la première paire collectée est

$$2^{2N}/C_{2N}^{N}.$$

Preuve. D'après ce qui précède, on peut écrire la quantité recherchée :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(\sigma)) &= \frac{\sum_{j=2}^{N+1} j \cdot a(N,j)}{(2N)!/(2^N N!)} \\
&= \frac{2^N N!}{(2N)!/(2^N N!)} \\
&= \frac{2^{2N}}{(2N)!/(N!)^2} \\
&= 2^{2N}/C_{2N}^{N}.
\end{aligned}$$

Nombre de tours espéré pour collecter la première paire

On déduit du résultat précédent le corollaire suivant :

Corollaire (L24). Le nombre de tours espéré pour collecter la première paire T_N est compris entre :

$$\lfloor 2^{2N-1}/C_{2N}^{N} \rfloor \quad \text{et} \quad \lfloor 2^{2N-1}/C_{2N}^{N} \rfloor + 2$$

et vérifie

$$T_N \sim_{N\to\infty} \frac{\sqrt{\pi N}}{2}.$$

Nombre de tours espéré pour collecter la première paire

Preuve. Le nombre de tirage requis pour collecter la première paire d'une distribution de cartes ne dépend que du réseau d'interconnection correspondant et donc de la distribution de cartes standard correspondante σ.

Notons $f(\sigma)$ la position de la (deuxième carte de la) première paire collectée.

Cette position est atteinte en $f(\sigma)$ tirages, aucun des tirages précédents ne révélant une paire.

Il faut un tirage de plus pour collecter la paire si $f(\sigma)$ est impair.

Si $f(\sigma)$ est pair, c'est fait le même tour si le premier 1 est en position $f(\sigma) - 1$: aucun tirage supplémentaire n'est requis ; sinon, deux tirages supplémentaires sont requis pour collecter la paire.

Nombre de tours espéré pour collecter la première paire

Notons $t(\sigma)$ le nombre de tours requis pour collecter la première paire ; alors :

$t(\sigma) = j/2 + 1$ si $f(\sigma) = j$ est pair et le premier 1 n'est pas en position $f(\sigma) - 1$.

$t(\sigma) = j/2 + 1/2$ si $f(\sigma) = j$ est impair.

$t(\sigma) = j/2$ si $f(\sigma) = j$ est pair et le premier 1 est en position $f(\sigma) - 1$.

Par conséquent :

$$\mathbb{E}(f(\sigma))/2 \leq \mathbb{E}(t(\sigma)) \leq \mathbb{E}(f(\sigma))/2 + 1,$$

d'où

$$\lfloor \mathbb{E}(f(\sigma))/2 \rfloor \leq \mathbb{E}(t(\sigma)) < \lfloor \mathbb{E}(f(\sigma))/2 \rfloor + 2.$$

Nombre de tours espéré pour collecter la première paire

Par ailleurs, la formule de Stirling [Graham et al. 1994, par exemple] permet d'écrire :

$$N! \sim \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N$$

d'où

$$2^{2N-1}/C_{2N}^N \sim 2^{2N-1}\,\frac{(\sqrt{2\pi N}(N/e)^N)^2}{\sqrt{2\pi(2N)}(2N/e)^{2N}} = \frac{\sqrt{\pi n}}{2}$$

d'où

$$T_N \sim_{N\to\infty} \frac{\sqrt{\pi N}}{2}.$$

Nb. de tours espéré pour terminer une partie

Nous allons présenter les principales idées de la preuve (très longue) du résultat suivant :

Théorème (VW13). Le nombre de tours espéré pour terminer une partie peut s'écrire :

$$(3 - 2\ln 2)\,N + 7/8 - 2\ln 2 + \varepsilon_N$$

où $\lim_{N\to\infty} \varepsilon_N = 0$.

Remarque. Une valeur approchée de cette expression asymptotique est : $1.6\,N$.

Nb. de tours espéré pour terminer une partie

Entame de la preuve. Notons $f(\sigma)$ la position de la première paire collectée et $t(\sigma)$ le nombre de tours requis pour collecter la première paire ; on a vu que :

$t(\sigma) = j/2 + 1$ si $f(\sigma) = j$ est pair et le premier 1 n'est pas en position $f(\sigma) - 1$.

$t(\sigma) = j/2 + 1/2$ si $f(\sigma) = j$ est impair.

$t(\sigma) = j/2$ si $f(\sigma) = j$ est pair et le premier 1 est en position $f(\sigma) - 1$.

Nb. de tours espéré pour terminer une partie

Une fois la paire de 1 collectée, le joueur poursuit la partie en retournant la carte en position $f(\sigma)+1$ puis continue en retournant les cartes deux à deux jusqu'à arriver à la carte appariée suivante, le deuxième 2.

Si le deuxième 2 est en position $f(\sigma)+k$, alors, comme précédemment, le nombre de tours requis pour retourner les cartes de la position $f(\sigma)+1$ à la position $f(\sigma)+k$ et collecter la deuxième paire vaut :

– $k/2+1/2$ si k est impair

– $k/2$ si k est pair et le premier 2 est en position $f(\sigma)+k-1$

– $k/2+1$ si k est pair et le premier 2 n'est pas en position $f(\sigma)+k-1$

Une fois que la paire de 2 a été collectée, le joueur continue en retournant les cartes deux à deux jusqu'à arriver au deuxième 3, et ainsi de suite jusqu'à avoir collecté l'ensemble des paires.

Nb. de tours espéré pour terminer une partie

Ainsi, on peut voir que la suite des deuxièmes occurences de chacun des nombres de 1 à N divise la donne σ en N blocs, chaque bloc se terminant avec une deuxième occurence.

La fonction $f(\sigma)$ considérée précédemment est la longueur du premier bloc.

Notons $b_1(\sigma) \equiv f(\sigma), b_2(\sigma), \ldots, b_N(\sigma)$ les longueurs des blocs.

Comme la donne compte $2N$ cartes, on a nécessairement :

$$b_1(\sigma) + b_2(\sigma) + \cdots + b_N(\sigma) = 2N.$$

Nb. de tours espéré pour terminer une partie

On dira qu'un bloc est *chanceux* s'il est de longueur au moins égale à 2 et si les deux dernières cartes du bloc sont appariées.

L'analyse précédente montre que le nombre de tours requis pour retourner toutes les cartes du i-ème bloc et collecter la i-ème paire est

$$b_i(\sigma)/2 + a_i(\sigma)$$

où

$$a_i(\sigma) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad b_i(\sigma) \quad \text{est impair} \\ 0 & \text{si} \quad b_i(\sigma) \quad \text{est pair et le i-ème bloc} \\ & \qquad\qquad \text{est chanceux} \\ 1 & \text{si} \quad b_i(\sigma) \quad \text{est pair et le i-ème bloc} \\ & \qquad\qquad \text{n'est pas chanceux} \end{cases}$$

Nb. de tours espéré pour terminer une partie

Notons $e(\sigma)$ le nombre de blocs de longueur paire.

Notons $\ell(\sigma)$ le nombre de blocs chanceux de longueur paire.

Alors, le nombre de tours requis pour terminer la partie est :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}(b_i(\sigma)/2 + a_i(\sigma)) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} b_i(\sigma) + (N - e(\sigma)) \cdot \frac{1}{2} \\ &\quad +(e(\sigma) - \ell(\sigma)) \cdot 1 \\ &= \frac{3N}{2} + \frac{e(\sigma)}{2} - \ell(\sigma).\end{aligned}$$

Nb. de tours espéré pour terminer une partie

Exemple. Si $N = 6$ et la donne est :

1 2 1 / 6 2 / 3 3 / 5 4 4 / 5 / 6

les longueurs des blocs sont : 3, 2, 2, 3, 1, 1 et le troisième bloc 3 3 et le quatrième 5 4 4 sont chanceux.

Par conséquent, $e(\sigma) = 2$ et $\ell(\sigma) = 1$.

La durée de la partie est donc (en nombre de tours) :

$$\frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{2}{2} - 1 = 9.$$

ce qui correspond à ce qu'on a pu constater au début de l'exposé.

Nb. de tours espéré pour terminer une partie

Pour démontrer le Théorème 7, on calcule les espérances de $e(\sigma)$ et $\ell(\sigma)$ puis on effectue une étude asymptotique pour trouver des équivalents de ces espérances lorsque $N \to \infty$ (cf. VW13).

Nb. espéré de tours chanceux dans une partie

Corollaire (VW13) Le nombre espéré de tours chanceux dans une partie tend vers $\ln 2$ lorsque $N \to \infty$.

Preuve. C'est une conséquence directe d'un lemme utilisé pour la preuve du théorème précédent.

Pistes de recherche

Questions :

- espérance du nombre maximum de cartes à mémoriser pour être en situation de mémoire "parfaite" ?

Cela permettrait de quantifier la difficulté moyenne des parties pour un choix donné de N.

Mémoire limitée :

- règle de scoring permettant d'encourager les mémorisations tout en améliorant le côté ludique du jeu sur ordinateur ?

Exemple : paire collectée avec une carte déjà retournée : 3 pts, coup chanceux : 1pt, tentative de collecte ratée : -2 pts [Kellner 2023].

Pistes de recherche

- Afin de modéliser la mémoire limité du joueur en pratique, on suppose qu'au lieu de la stratégie optimale, sa stratégie peut être décrite de la façon suivante (SL) :

A chaque tour, le joueur commence par tirer une nouvelle carte.

Si la carte retournée possède une carte appariée déjà révélée face cachée, alors le joueur retourne la carte appariée avec la probabilité p, une carte déjà révélée non appariée avec la probabilité p' et l'une des cartes non déjà révélées avec la probabilité $q = 1 - p - p'$.

Ceci modélise le fait que le joueur se souvient de la position de la carte qui fait la paire avec la probabilité p et qu'elle a déjà été tirée avec la probabilité $p + p'$.

Pistes de recherche

Si la carte retournée ne possède pas de carte appariée face cachée déjà révélée, alors le joueur retourne une carte non déjà révélée avec la probabilité p'' et une carte déjà révélée avec la probabilité $q'' = 1 - p''$.

Ceci modélise le fait que le joueur se souvient que la carte faisant la paire n'a pas été déjà révélée avec la probabilité p''.

Pistes de recherche

- position espérée de la première paire collectée ?

- nombre de tours espéré pour collecter la première paire ?

- nombre de tours espéré pour terminer la partie ?

- nombre espéré de tours chanceux ?

- Comment estimer p, p', p'' ?

- Comment choisir N de façon à estimer p, p' et p'' au mieux tout en maintenant l'intérêt du jeu ?

Bibliographie

(FW13) Foerster & Wattenhoffer, The Solitaire Memory Game, ETH Zurich, 2013.

(VW13) Velleman & Warrington, What to expect in a game of memory ?, The American Mathematical Monthly (120 :9, 2013).

(K23) Kellner, Formalization and evaluation of memory-based listening experiments, Researchgate 2023.

(FG09) Flageolet & Sedgewick, Analytic Combinatorics, Cambridge 2009.

(G94) Graham, Knuth & Patashnik, Concrete Mathematics, 2nd Ed., Addison-Wesley, 1994.

(L24) Cet exposé.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION

QUESTIONS ?