Université de Bretagne-Sud
L3 Informatique

Logique
Travaux Dirigés - Partie 9

Dans ce neuvième TD, nous allons aborder la notion de modèle à travers un ensemble de questions.
Les questions sont de difficultés diverses et sont à traiter en se basant sur les notions introduites en cours (parties 5.3, 5.4).
Bon travail !

On dit qu'un modèle est *fini*, *infini*, si la cardinalité de son univers du discours est respectivement finie, infinie.

a) Donner un modèle de :

$$\forall x P(g(x, f(x)), a)$$

b) Donner un modèle et un contre-modèle de :

$$\forall x \forall y (P(f(x, y), a) \Rightarrow P(x, y))$$

c) Donner un modèle de :

$$\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \Rightarrow P(f(x, z), f(y, z)))$$

d) Donner un modèle de :

$$\forall x \exists y P(x, f(f(x, y), y))$$

e) Donner un modèle de :

$$\forall x \forall y (P(f(x,a),y) \Rightarrow P(f(y,a),x))$$

f) Donner un contre-modèle de :

$$\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$$

g) Donner un modèle et un contre-modèle de :

$$\forall x \forall y \, [(P(x,y) \wedge \neg Q(x,y)) \Rightarrow (\exists z (P(x,z) \wedge \neg Q(z,x) \wedge P(z,y) \wedge \neg Q(z,y)))]$$

h) La fbf :

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

est-elle valide ?

i) Donner un modèle de la formule suivante qui soit indépendant du domaine de discours choisi. Autrement dit, donner une interprétation du prédicat P, telle que pour n'importe quel domaine elle corresponde à un modèle de la formule donnée :

$$\forall x \forall y \forall z . P(x,y) \wedge P(x,z) \Leftrightarrow P(x,y) \wedge P(y,z)$$

j) Étant donnée la fbf :

$$\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \vee P(y,z) \vee P(x,z))$$

j_1) en donner un modèle avec domaine $D = \mathbb{R}$ (c'est-à-dire un modèle *infini*) ;

j_2) en donner un modèle avec domaine $D = \{1, 2\}$ (c'est-à-dire un modèle *fini*) ;

j_3) en donner un contre-modèle avec domaine $D = \mathbb{N}$.

k) Pouvez-vous donner :

k_1) un modèle fini de la formule :

$$\forall x \neg P(x,x) \wedge \forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z))$$

k_2) un modèle non dénombrable ?

k_3) un modèle dénombrable ?

l) Donner un modèle et un contre-modèle de :

$$\forall x \exists y \exists z \forall u \, [\neg E(y,z) \wedge A(x,y) \wedge A(x,z) \wedge A(x,u)] \Rightarrow (E(u,y) \vee E(u,z))$$

m) Étant données les formules 1., 2. et 3. ci-dessous, montrer que 3. n'est pas une conséquence logique de 1. et 2. (c'est-à-dire que la commutativité de $+$ ne se déduit pas de 1. et 2.).

1. $\forall x . 0 + x = x$
2. $\forall x \forall y . s(x) + y = s(x+y)$
3. $\forall x . x + 0 = x$

0 dénote une constante, x, y des variables et s un symbole fonctionnel.

n) Pouvez-vous donner un modèle de l'ensemble de formules ci-dessous ?

$$\begin{aligned}
&\forall x . f(a,x) = x \\
&\forall x . f(s(x),y) = s(f(x,y)) \\
&\forall x . s(p(x)) = x \\
&\forall x . p(s(x)) = x \\
&\forall x . f(p(x),y) = p(f(x,y))
\end{aligned}$$

a dénote une constante, x, y des variables et f, s, p des symboles fonctionnels.