Université de Bretagne-Sud
L3 Informatique

Logique

Travaux Dirigés - Partie 9
Corrigés

Dans ce neuvième TD, nous allons aborder la notion de modèle à travers un ensemble de questions.
Les questions sont de difficultés diverses et sont à traiter en se basant sur les notions introduites en cours (parties 5.3, 5.4).
Bon travail !

On dit qu'un modèle est *fini*, *infini*, si la cardinalité de son univers du discours est respectivement finie, infinie.

a) Donner un modèle de :

$$\forall x P(g(x, f(x)), a)$$

$D = \mathbb{N}$
$a \mapsto 0$
$f(x) \mapsto succ(x)$ **% $succ(x)$: le successeur de x (c'est-à-dire $x + 1$)**
$g(x, y) \mapsto x + y$
$P(x, y) \mapsto x > y$

b) Donner un modèle et un contre-modèle de :

$$\forall x \forall y (P(f(x, y), a) \Rightarrow P(x, y))$$

Modèle :
$D = \mathbb{Z}$
$a \mapsto 0$
$f(x, y) \mapsto x - y$
$P(x, y) \mapsto x > y$
Contre-modèle :
Changer seulement
$a \mapsto -5$

c) Donner un modèle de :

$$\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \Rightarrow P(f(x, z), f(y, z))$$

$D = \mathbb{N}$
$f(x, y) \mapsto x + y$
$P(x, y) \mapsto x > y$

d) Donner un modèle de :

$$\forall x \exists y P(x, f(f(x, y), y))$$

$D = \mathbb{N}$
$f(x, y) \mapsto x \times y$
$P(x, y) \mapsto x \geq y$ $\quad$ **%** $y = 0$

e) Donner un modèle de :

$$\forall x \forall y (P(f(x, a), y) \Rightarrow P(f(y, a), x))$$

$D = \mathbb{N}$
$a \mapsto 0$
$f(x, y) \mapsto x + y$
$P(x, y) \mapsto x = y$

f) Donner un contre-modèle de :

$$\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$$

$D = \mathbb{N}$
$P(x, y) \mapsto x < y$

g) Donner un modèle et un contre-modèle de :

$$\forall x \forall y \left[(P(x, y) \land \neg Q(x, y)) \Rightarrow (\exists z (P(x, z) \land \neg Q(z, x) \land P(z, y) \land \neg Q(z, y)))\right]$$

Modèle :
$D = \mathbb{Q}$
$P(x,y) \mapsto x < y$
$Q(x,y) \mapsto x = y$
Contre-modèle :
Changer $D = \mathbb{N}$

h) La fbf :

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

est-elle valide ?

h) Non.
Prendre, par exemple :
$D = \mathbb{N}$
$P(x) \mapsto x$ est pair
$Q(x) \mapsto x$ est impair

i) Donner un modèle de la formule suivante qui soit indépendant du domaine de discours choisi. Autrement dit, donner une interprétation du prédicat P, telle que pour n'importe quel domaine elle corresponde à un modèle de la formule donnée :

$$\forall x \forall y \forall z . P(x,y) \wedge P(x,z) \Leftrightarrow P(x,y) \wedge P(y,z)$$

$P(x,y) \mapsto x = y$

j) Étant donnée la fbf :

$$\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \vee P(y,z) \vee P(x,z))$$

j_1) en donner un modèle avec domaine $D = \mathbb{R}$ (c'est-à-dire un modèle *infini*) ;

$D = \mathbb{R}$
$P(x,y) \mapsto x$ et y sont du même signe

j_2) en donner un modèle avec domaine $D = \{1,2\}$ (c'est-à-dire un modèle *fini*) ;

$D = \{1,2\}$
$P(x,y) \mapsto x = y$

j_3) en donner un contre-modèle avec domaine $D = \mathbb{N}$.

$D = \mathbb{N}$
$P(x,y) \mapsto x = y$
(prendre, par exemple $x = 3, y = 4, z = 5$)

k) Pouvez-vous donner :

k_1) un modèle fini de la formule :

$$\forall x \neg P(x,x) \wedge \forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z))$$

Cette formule n'a pas de modèle fini.

Nous le prouvons par l'absurde. Nous supposons qu'elle a un modèle fini de domaine :

$D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$
$P \mapsto \mathfrak{P}$
Comme $\mathfrak{P}$ est totale pour un élément quelconque $a_i \in D$:
$\mathfrak{P}(a_i, a_j)$ et $a_i \neq a_j$ ($\mathfrak{P}$ est irreflexive)
aussi :
$\mathfrak{P}(a_j, a_k)$ et $a_j \neq a_k$ et $\mathfrak{P}(a_i, a_k)$ ($\mathfrak{P}$ est transitive)
aussi :
$\mathfrak{P}(a_k, a_l)$ et $a_k \neq a_l$ et $\mathfrak{P}(a_i, a_l)$ et $\mathfrak{P}(a_j, a_l)$
...
mais comme D est fini (et de cardinalité n), au bout de au plus $n-1$ pas, on doit produire (par transitivité) $\mathfrak{P}(a_q, a_r)$ avec $q = r$ (parce que a_q est en relation avec un des a_i dans D, que tôt ou tard sera atteint).

Ceci est contradictoire parce que $\mathfrak{P}$ est irreflexive.

Donc cette formule n'a pas de modèle fini.

k_2) un modèle non dénombrable ?

$D = \mathbb{R}$
$P(x,y) \mapsto x < y$

k_3) un modèle dénombrable ?

$D = \mathbb{N}$
$P(x,y) \mapsto x < y$

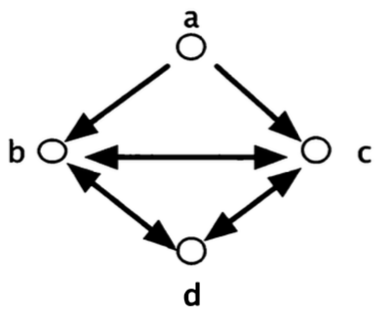
l) Donner un modèle et un contre-modèle de :

$$\forall x \exists y \exists z \forall u \, [\neg E(y,z) \wedge A(x,y) \wedge A(x,z) \wedge A(x,u)] \Rightarrow (E(u,y) \vee E(u,z))$$

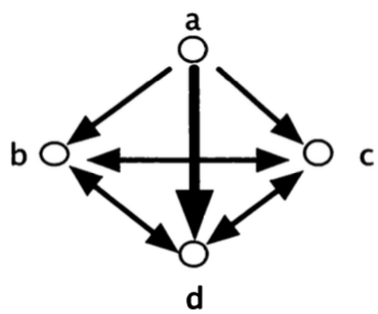
On peut donner une infinité de modèles pour cette formule en choisissant :
$D \neq \emptyset$
$E(x, y) \mapsto x = y$
$A(x, y) \mapsto x$ et y sont dans la relation A.

Comme relation A on en prend une telle que chaque élément est en relation avec *exactement deux autres* éléments.

par exemple :
$D = \{a, b, c, d\}$
$A^{\mathcal{M}} = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, b), (c, d), (d, b), (d, c)\}$
Ce qui peut être représenté par le graphe :



On obtient un contre-modèle, en ajoutant au moins un couple (un arc) à la relation (au graphe la représentant), par exemple :
$A^{\mathcal{M}} = \{(a, b), (a, c), (\mathbf{a}, \mathbf{d}), (b, c), (b, d), (c, b), (c, d), (d, b), (d, c)\}$



m) Étant données les formules 1., 2. et 3. ci-dessous, montrer que 3. n'est pas une conséquence logique de 1. et 2. (c'est-à-dire que la commutativité de $+$ ne se déduit pas de 1. et 2.).

1. $\forall x.0 + x = x$

2. $\forall x \forall y.s(x) + y = s(x + y)$

3. $\forall x.x + 0 = x$

0 dénote une constante, x, y des variables et s un symbole fonctionnel.

Considérer l'interprétation $\mathcal{I}$:
$D = \{0, a\}$
$s \mapsto \boldsymbol{s}$
$\boldsymbol{s}(0) = 0$
$\boldsymbol{s}(a) = a$
$+ \mapsto \maltese$
$\forall u \forall v. u \maltese v = v$
$= \mapsto =$ % = a le même sens qu'en mathématiques.
On vérifie que $\mathcal{I}$ est un modèle de 1. et 2. et un contre-modèle de 3. :
1.
$0 \maltese 0 = 0$ **V** $0 \maltese a = a$ $a = a$ **V**

2.
$\boldsymbol{s}(0) \maltese 0 = \boldsymbol{s}(0 \maltese 0)$
$0 = \boldsymbol{s}(0)$
$0 = 0$ **V**

$\boldsymbol{s}(0) \maltese a = \boldsymbol{s}(0 \maltese a)$
$0 \maltese a = \boldsymbol{s}(a)$
$a = a$ **V**

$\boldsymbol{s}(a) \maltese 0 = \boldsymbol{s}(a \maltese 0)$

$a \maltese 0 = \boldsymbol{s}(0)$
$0 = 0$ **V**

$\boldsymbol{s}(a) \maltese a = \boldsymbol{s}(a \maltese a)$
$a \maltese a = \boldsymbol{s}(a \maltese a)$
$a = \boldsymbol{s}(a)$
$a = a$ **V**

3.
$a \maltese 0 = a$
$0 = a$ **F**

n) Pouvez-vous donner un modèle de l'ensemble de formules ci-dessous ?

$$\forall x. f(a, x) = x$$

$$\forall x. f(s(x), y) = s(f(x, y))$$

$$\forall x. s(p(x)) = x$$

$$\forall x. p(s(x)) = x$$

$$\forall x. f(p(x), y) = p(f(x, y))$$

a dénote une constante, x, y des variables et f, s, p des symboles fonctionnels.

$D = \mathbb{N}$
$a \mapsto 0$
$s \mapsto \mathsf{succ}$
$p \mapsto \mathsf{pred}$
$f \mapsto + \blacksquare$