Université de Bretagne-Sud
L3 Informatique

Logique
Travaux Dirigés - Partie 8

Dans ce huitième TD, nous allons aborder la notion de termes du premier ordre, de substitution et l'algorithme d'unification.
Les exercices sont de difficultés diverses et sont à traiter en se basant sur les notions introduites en cours (partie 4).
J'ai choisi de vous proposer un nombre d'exercices limité à 4 pour ce TD. Nous monterons en puissance sur la Logique des Prédicats (LP1) au fur et à mesure des prochains TD. Bon travail !

Exercice 1

a) Trouver la solution (si elle existe) de l'équation :

$$f(x, g(x, y)) \doteq f(g(y, z), g(g(h(u), y), h(u)))$$

b) Trouver la solution (si elle existe) de l'équation :

$$f(x, f(u, x)) \doteq f(f(y, a), f(z, f(b, z)))$$

c) Etant données les substitutions :

$$\theta : \{x \mapsto a, y \mapsto f(z), z \mapsto x\}$$

et

$$\sigma = \{x \mapsto b, z \mapsto c, u \mapsto d\}$$

Donner la substituion $\sigma \circ \theta$.

d) Considérons l'équation $t_1 \doteq t_2$ et $V(t_1) \cap V(t_2) = \emptyset$.

La règle **cycle** dans l'algorithme d'unification est-elle toujours nécessaire ? Pouvez-vous donner une condition suffisante pour pouvoir se passer de la règle **cycle** ?

Exercice 2

Dans un calcul que l'on appelle *equivalential calculus* en anglais, les fbf du langage correspondant sont de la forme $e(X, Y)$ où e est un symbole constant (pour équivalent) et X, Y des (méta)variables dénotant des fbf du langage.

La seule règle d'inférence est :

$$CD : \frac{e(A, B) \quad C}{\sigma B} \quad \text{avec} \quad \sigma = upg(A, C)$$

Questions :

Entant données les deux fbf :

$$e(X, e(X, e(Y, Y)))$$

et

$$e(Z, Z)$$

1. Peut-on appliquer CD ?
2. Si c'est le cas, quelles sont les possibilités ?
3. Si l'on peut appliquer CD, quelle(s) est (sont) la (les) conséquence(s) directe(s) ?

Exercice 3

L'algorithme d'unification ne suppose aucune propriété pour les fonctions dénotées par les symboles fonctionnels et donne un résultat (substitution) unique, à un renommage des variables près.

Si l'on suppose que les (ou certaines des) fonctions binaires dénotées sont commutatives, par exemple :

$$\forall x_1 \forall x_2 . f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$$

Pouvez-vous modifier l'algorithme d'unification afin de tenir compte de cette propriété ?

Par exemple, pour l'équation :

$$f(g(a,b),x) \doteq f(h(c),g(y,z))$$

l'algorithme d'unification retournerait ▲ (pas de solution), mais une fois modifié comme demandé, avec f et g commutatives, il donnerait comme solutions :

$$\sigma_1 = \{x \leftarrow h(c), y \leftarrow a, z \leftarrow b\}$$

et

$$\sigma_2 = \{x \leftarrow h(c), y \leftarrow b, z \leftarrow a\}$$

Exercice 4

Montrer, à l'aide de l'algorithme d'unification (modifié à l'exercice 3) que, si les prémisses non conditionnelles (c'est-à-dire celles ne contenant pas ⇒) sont des littéraux, les règles MP (modus ponens) et MT (modus tollens) :

$$MP : \frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$$

$$MT : \frac{\neg B \quad A \Rightarrow B}{\neg A}$$

sont des cas particuliers de la règle de résolution :

$$R : \frac{X \vee \mathcal{X} \quad \neg X \vee \mathcal{Y}}{\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}}$$